

I. МЕХАНИКА

ЗАДАЧИ

I.1.1 (15 баллов). Частица массой m_1 и импульсом P_1 упруго сталкивается с частицей массой m_2 , которая первоначально находилась в покое.

а) Определите максимально возможный импульс частицы m_2 в лабораторной системе отсчета после столкновения. (Используйте формулы релятивистской теории.)

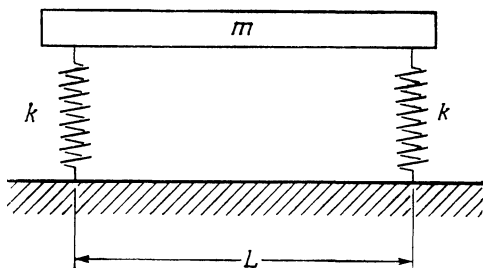
б) Примените полученный результат к случаю столкновения протона, импульс которого равен отношению энергии покоя протона к скорости света c , с неподвижным электроном. Найдите численное значение максимального импульса электрона в МэВ/с после столкновения.

I.1.2 (15 баллов). На гладкой ровной поверхности обыкновенного стола лежит тонкий однородный стержень массой m и длиной L . На конце стержня перпендикулярно его оси действует импульс силы F , направленный горизонтально.

а) На какое расстояние передвинется центр масс стержня за время полного своего оборота?

б) Чему равны энергии поступательного и вращательного движений стержня и его полная кинетическая энергия после воздействия импульса силы?

I.1.3 (15 баллов). Однородная балка массой m и длиной L поддерживается на своих концах двумя одинаковыми пружинами с жесткостью k . Балку приводят в движение, нажимая на один из ее концов, смещая его вниз на небольшое расстояние a и затем освобождая. Решите задачу о движении балки, вводя нормальные моды и частоты колебаний. Схематически изобразите нормальные моды.



1.1.4 (10 баллов). Дана матрица A из $N \times N$ действительных элементов.

а) Пусть A — симметрическая матрица, т. е. $A_{ij} = A_{ji}$. Докажите, что все ее собственные значения действительны.

б) Пусть A не является симметрической матрицей; докажите, что любые ее комплексные собственные значения образуют сопряженные пары.

1.1.5 (15 баллов). В северном полушарии на широте 45° с высоты h (h много меньше радиуса Земли) падает покоившееся вначале тело массой m . В каком месте оно упадет относительно отвеса, опущенного из исходной точки? Не забудьте указать не только величину, но и направление смещения.

1.1.6 (15 баллов). Упругая струна длиной L подвешена между двумя опорами. Натяжение струны T , а ее линейная плотность ρ . Общая масса струны $M = \rho L$. Колебания струны возбуждаются ударом молоточка, который сообщает небольшому участку длиной a в середине струны поперечную скорость v_0 . Определите амплитуды первых трех низкочастотных гармоник.

1.1.7 (5 баллов). Твердое тело движется в воздухе с очень большой скоростью V (превышающей среднюю скорость движения молекул воздуха). Докажите, что сила сопротивления пропорциональна AV^2 , где A — площадь лобовой поверхности тела.

1.1.8 (5 баллов). Какой стала бы продолжительность суток на Земле, если Земля вращалась бы с такой скоростью, что тела на экваторе парили в невесомости?

1.1.9 (5 баллов). Дайте определение циклической координаты. Какие преимущества она дает при решении задач?

1.2.1 (10 баллов).

а) (5 баллов). Покажите, что косоэрмитова матрица ($A^+ = -A$) может иметь только одно вещественное собственное значение, и оно равно нулю.

б) (5 баллов). Используя метод вычетов, вычислите

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

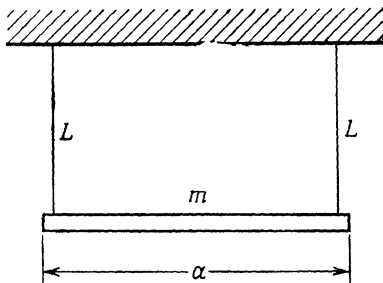
1.2.2 (15 баллов).

а) (10 баллов). Сколь огромную энергию пришлось бы затратить, чтобы «разнести» всю Землю (т. е. удалить все ее составные части на ∞)?

б) (5 баллов). Предположим, что затем произошло бы быстрое (без потерь энергии на излучение) воссоединение разнесенных на бесконечность этих частей Земли. Расплавилась бы она? Свой ответ обоснуйте.

1.2.3 (30 баллов).

а) (20 баллов). Жесткий стержень массой m и длиной a подвешен с обоих концов на невесомых нитях, имеющих одинаковую длину L .



Стержень выводят из состояния покоя, прикладывая небольшой импульс силы P к одному из его концов в направлении, перпендикулярном стержню и нити. Определите частоты и амплитуды нормальных мод колебаний.

б) (10 баллов). Стержень находится в покое. Каково натяжение одной из нитей сразу после того, как другую мгновенно перережут?

1.2.4 (25 баллов). Частица массой m движется в поле центральной силы с потенциалом $V(r) = Kr^3$ ($K > 0$).

а) (10 баллов). Определите кинетическую энергию и момент импульса частицы при движении ее по круговой орбите (радиусом a).

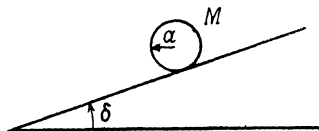
б) (5 баллов). Чему равен период такого кругового движения?

в) (10 баллов). Каков период малых радиальных колебаний частицы относительно $r=a$, если ее движение под действием возмущений слегка отклонилось от кругового?

1.2.5 (20 баллов). Полагают, что можно получить моноэнергетические фотоны высоких энергий путем рассеяния лазерного излучения на пучке быстрых электронов, выходящих из электронного ускорителя. Выведите формулу для максимальной энергии каждого из рассеиваемых фотонов в зависимости от энергии фотонов лазерного излучения и энергии электронов в пучке. Выполните численные расчеты в случае излучения

рубинового лазера, которое рассеивается на электронах с энергией 20 ГэВ, получаемых от Стэнфордского линейного ускорителя.

1.3.1 (15 баллов). Шарик массой M и радиусом a скатывается без скольжения по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол δ .

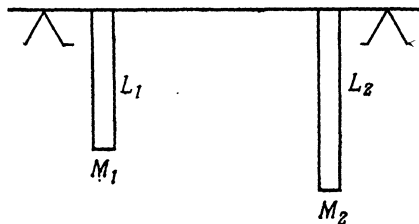


- Определите ускорение центра масс шарика.
- Если шарик толкнуть вверх по наклонной плоскости с начальной скоростью v_0 , то через какой промежуток времени он вернется в исходную точку?

1.3.2 (15 баллов). Нестабильная частица с энергией покоя 1000 МэВ и средним временем жизни в состоянии покоя 10^{-8} с распадается на мю-мезон ($m_\mu c^2 = 100$ МэВ) и нейтрино.

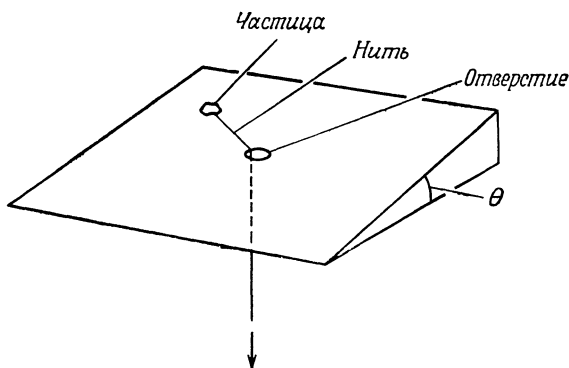
- Вычислите среднюю длину распада, если частица имеет импульс 1000 МэВ/с.
- Какова энергия мю-мезона в последнем случае, если он испущен под углом 15° ?

1.3.3 (15 баллов). Рассмотрим две балки массами M_1 и M_2 и длиной L_1 и L_2 , жестко прикрепленные к горизонтальному невесомому стержню. Концы стержня лежат на опорах; стержень обладает крутильной жесткостью K и может вращаться только вокруг своей продольной оси. Система совершает колебания под действием силы тяжести. Напишите лагранжиан системы (введя свои переменные) и найдите уравнения движения.



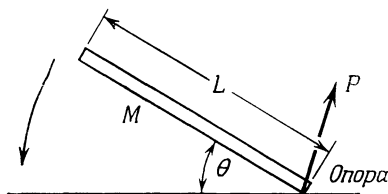
1.3.4 (25 баллов). На шероховатой плоскости, наклоненной под углом θ ($\operatorname{tg} \theta = \mu$, где μ — коэффициент трения как покоя, так и скольжения), расположена частица. К частице прикрепле-

на нить, проходящая через небольшое отверстие в наклонной плоскости.



Нить очень медленно подтягивают, и можно считать, что частица все время находится в почти статическом равновесии. Определите траекторию частицы на наклонной плоскости.

1.3.5 (15 баллов). Стержень массой M и длиной L свободно падает в вертикальной плоскости, как показано на рисунке.



В начальном состоянии покоя стержень составлял с горизонталью угол 30° . Определите давление на ось вращения стержня в тот момент, когда он проходит горизонтальное положение.

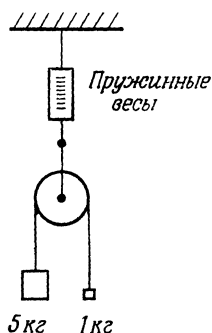
1.3.6 (15 баллов). Движущийся протон сталкивается с другим протоном, который первоначально находился в покое. Какой минимальной кинетической энергией должен обладать движущийся протон, чтобы стала возможной реакция $p + p = p + p + p + \bar{p}$? Масса антипротона $\bar{p}$ равна массе протона. Представьте полученный вами результат в виде отношения кинетической энергии к энергии покоя протона. Каково приближенно численное значение кинетической энергии в МэВ?

1.4.1 (15 баллов). Предположим, что приливные волны на Земле вызываются только Солнцем.

а) Откуда черпается энергия, рассеиваемая во время приливов, и чему равна максимальная величина этой энергии?

б) Какие процессы обеспечивают сохранение суммарного момента импульса системы?

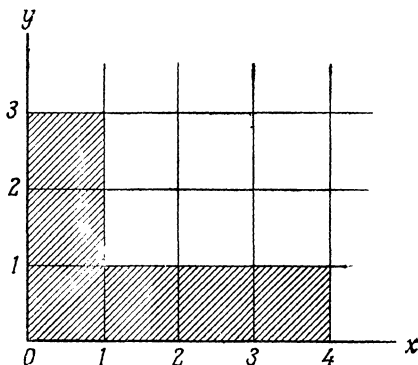
1.4.2 (5 баллов). Время жизни мю-мезона составляет $2 \cdot 10^{-6}$ с. Пучок мю-мезонов выходит из циклотрона со скоростью $0,8c$, где c — скорость света. Каково должно быть время жизни мю-мезонов в этом пучке в лабораторной системе отсчета?



1.4.3 (5 баллов). На рисунке показан блок пренебрежимо малой массы, подвешенный к пружинным весам. К концам нити, переброшенной через блок, прикреплены грузы массами 1 и 5 кг. Грузы движутся с ускорением под действием силы тяжести. Какой вес покажут пружинные весы при движении грузов — 6 кг, меньше или больше?

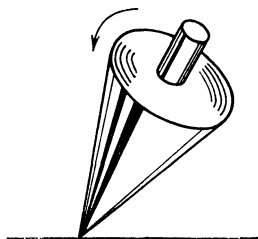
1.4.4 (5 баллов). Из винтовки вылетает пуля. Если допустить свободную отдачу (т. е. движению винтовки не противодействует плечо стрелка), то будет ли кинетическая энергия винтовки после выстрела равна, меньше или больше кинетической энергии пули?

1.4.5 (5 баллов). На рисунке заштрихованная область представляет однородную пластину в форме буквы L . Определите координаты $\bar{x}$ и $\bar{y}$ ее центра масс.



1.4.6 (5 баллов). В стакане с водой при температуре 0°C плавает кубик льда. Лед растаял. Поднимется, упадет или останется прежним уровень воды в стакане?

I.4.7 (5 баллов). Волчок вращается вокруг своей оси в направлении, указанном на рисунке. Острие волчка упирается в стол. По часовой стрелке или против нее прецессирует ось волчка, если смотреть на него сверху?



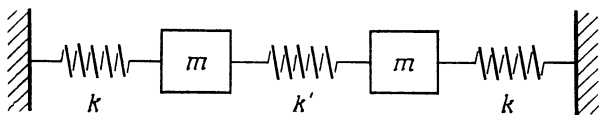
I.4.8 (5 баллов). К концам пружины жесткостью k прикреплены грузы с массами m и $3m$. Чему равен период колебаний системы?

I.4.9 (5 баллов). Зависимость потенциальной энергии взаимодействия двух частиц V от расстояния r между ними дается выражением

$$V = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r},$$

где a и b — положительные коэффициенты. На каком расстоянии r частицы находятся в статическом равновесии?

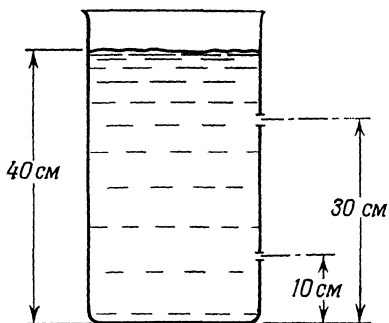
I.4.10 (5 баллов). Две частицы с одинаковыми массами скреплены пружинами, как показано на рисунке. Частицы могут свободно колебаться в продольном направлении. Изобразите стрелками (или опишите) соотношения амплитуд и фаз колебаний частиц, соответствующих двум нормальным модам (1 и 2).



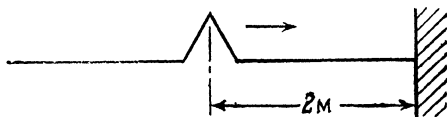
I.4.11 (5 баллов). Предположим, что радиус Земли сократился на 1%, а масса ее осталась неизменной. Увеличится или уменьшится ускорение свободного падения g на поверхности Земли? Если да, то на сколько процентов?

I.4.12 (5 баллов). Пустая цилиндрическая консервная банка и такая же банка, но с плотно набитым колбасным фаршем начинают одновременно скатываться по наклонной плоскости. Какая из банок скатится вниз первой?

1.4.13 (5 баллов). Цилиндрический стакан наполнен водой до уровня 40 см. В стенке стакана имеются два одинаковых отверстия: одно — на высоте 10 см, а другое — на высоте 30 см. Чему равно отношение масс воды в начальный момент времени, вытекающей за 1 с из обоих отверстий?



1.4.14 (5 баллов). Длинная натянутая струна прикреплена справа к жесткой стене. По струне слева направо распространяется со скоростью 1 м/с поперечное возмущение, имеющее вид равнобедренного треугольного импульса. В начальный момент времени вершина этого импульса отстоит от стены на расстояние 2 м. Нарисуйте профиль струны спустя 2 с и спустя 5 с от начала отсчета.



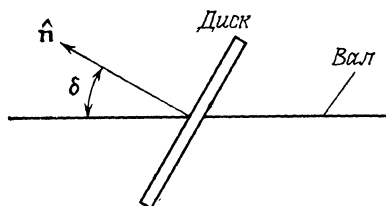
1.4.15 (10 баллов). Формула для кориолисовой силы имеет вид

$$\mathbf{F} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}.$$

- В каком случае применяют эту формулу и какой смысл имеют входящие в нее символы?
- Река в северном полушарии течет к югу. Ширина русла реки на широте λ равна W . Уровни воды на восточном и западном берегах реки должны быть различными. Какой из них будет выше?
- Выведите формулу для разности уровней, подробно поясняя значение каждого используемого в ней символа.
- Оцените весьма приблизительно эту разность уровней для

реки Миссисипи¹⁾. Укажите числовые данные, которые вы приписали (пусть даже по догадке) различным параметрам.

I.4.16 (10 баллов). Диск плотно насажен на вал, проходящий через центр диска, причем ось симметрии диска $\hat{n}$ образует с валом угол δ .

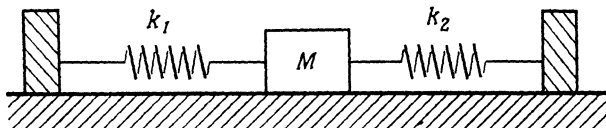


Главный центральный момент инерции диска относительно оси симметрии $\hat{n}$ обозначим через C , а относительно любой оси $\hat{n}'$, перпендикулярной $\hat{n}$, — через A . Вал вращается в подшипниках с постоянной угловой скоростью ω . Определите *величину* вращающего момента, действующего на подшипники.

I.5.1 (10 баллов). Брусек массой M лежит на идеально гладком горизонтальном столе и посредством пружин, характеризующих жесткостью k_1 и k_2 , связан с двумя неподвижными опорами.

а) Какова будет частота продольных колебаний бруска, если его слегка вывести из равновесного положения? Предположим, что амплитуда колебаний бруска равна A и в тот момент, когда он проходит положение равновесия, к нему прилипает упавший сверху груз массой m . Определите:

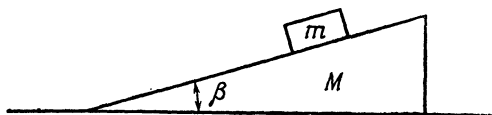
- б) новую частоту колебаний,
в) новую амплитуду колебаний.



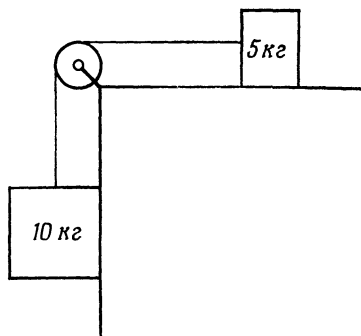
I.5.2 (10 баллов). На гладком горизонтальном столе расположен клин с углом β при вершине. Масса клина равна M . На наклонную поверхность клина помещают брусек массой m ,

¹⁾ Вместо этого попытайтесь оценить разность уровней у знакомой вам реки. О правильности ответа можно судить по сопоставлению ваших числовых данных с теми, что приводит автор. — Прим. ред.

который начинает скользить вниз. Трением между любыми поверхностями можно пренебречь. Чему равно ускорение клина относительно стола (до того момента, когда брусок коснется стола)?



1.5.3 (3 балла). К краю стола, как показано на рисунке, прикреплен блок, массой и коэффициентом трения которого можно пренебречь. Трение на поверхности стола также можно не учитывать. Через блок переброшена невесомая нить, к концам которой прикреплены два бруска массами 10 и 5 кг. Будет ли натяжение нити больше, равно или меньше, чем в том случае, когда брусок массой 5 кг приклеен к столу?

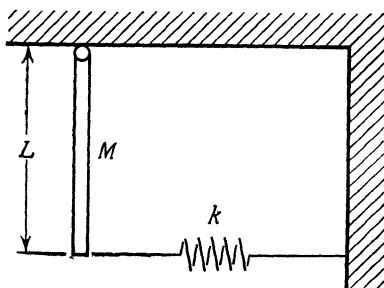


1.5.4 (3 балла). Диск вращается в горизонтальной плоскости вокруг своей оси. В узкую радиальную канавку, расположенную на верхней поверхности диска, вставлено лезвие безопасной бритвы. В каком направлении — в сторону или против вращения — начнет падать лезвие, если оно будет двигаться по направлению к центру диска?

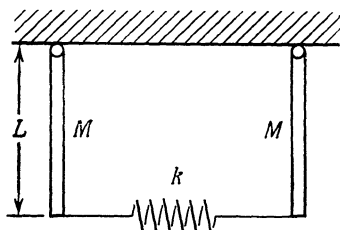
1.5.5 (3 балла). Представьте себе, что радиус Земли уменьшился на 1%, а масса ее осталась прежней. Увеличится ли, останется прежней или уменьшится энергия вращения Земли? Если изменится, то на сколько процентов?

1.5.6 (3 балла). Однородный тонкий стержень массой M и длиной L висит на шарнире без трения. В нижней своей части, как показано на рисунке, он связан со стеной посредством пружины.

жины, обладающей жесткостью k . Чему равен период колебаний стержня?



1.5.7 (3 балла). Два тонких стержня каждый массой M и длиной L подвешены на шарнирах и соединены внизу пружиной таким образом, что в состоянии покоя они находятся в вертикальном положении. Жесткость пружины равна k . Покажите стрелками характер колебаний, соответствующих двум нормальным модам. Какие частоты соответствуют этим нормальным модам?



1.5.8 (3 балла). Каково (с точностью до одной значащей цифры) отношение масс Солнца и Земли?

1.5.9 (3 балла). Два человека одинакового веса держатся руками за концы каната, переброшенного через блок. Оба начинают подниматься по канату вверх. Один из них взбирается со скоростью (относительно каната), вдвое превышающей скорость другого. Трением в блоке можно пренебречь. Кто первым достигнет блока: а) более быстрый, б) менее быстрый, в) оба одновременно или г) ответ неоднозначен?

1.5.10 (3 балла). Пробка погружена в ведро с водой и удерживается в ней с помощью пружины, прикрепленной ко дну ведра. Ведро держит в руке человек, находящийся в лифте. Что произойдет с пружиной в начале спуска лифта, когда он движется ускоренно: а) пружина растянется, б) сожмется или в) ее состояние не изменится?

1.5.11 (3 балла). Один из спутников запущен на круговую орбиту радиусом R . Другой — на орбиту радиусом $1,01 R$. Будет ли период обращения второго спутника больше, равен или меньше периода обращения первого спутника? Если периоды обращения различаются, то на сколько процентов?

1.5.12 (3 балла). Шарик радиусом R погружается в жидкость, коэффициент вязкости которой равен η . Сила сопротивления, действующая на шарик со стороны жидкости, по закону Стокса равна $6\pi\eta Rv$. Одновременно в жидкость погружается другой шарик той же массы, но радиусом $2R$. Чему равны отношения

а) их начальных ускорений a_R/a_{2R} ,

б) их установившихся скоростей v_R/v_{2R} ?

1.5.13 (3 балла). Частица движется в поле одной из сил, определяемых следующими выражениями:

1) $F_x = 2yz(1 - 6xyz)$, $F_y = 2xz(1 - 6xyz)$, $F_z = 2xy(1 - 6xyz)$

и

2) $F_x = y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$, $F_y = x^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$,
 $F_z = x^2 + y^2 + 2(xy + yz + zx)$.

а) Для какой из них можно ввести потенциал $V(x, y, z)$?

б) В поле какой силы сохраняется полная (кинетическая плюс потенциальная) энергия движущейся частицы?

1.5.14 (20 баллов). Шар радиусом r вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω . Ось вращения горизонтальна. Шар падает на ровную поверхность, некоторое время вращается на месте, а затем начинает катиться без скольжения. Коэффициент трения равен μ .

а) Чему равна конечная скорость центра масс шара?

б) Какое расстояние пройдет шар, прежде чем установится эта скорость?

в) Вычислите конечную скорость центра масс шара для случая большого μ , когда начальное скольжение полностью отсутствует.

1.5.15 (13 баллов). Мяч в форме эллипсоида вращения имеет главные центральные моменты инерции I_1 , I_2 и I_3 ¹⁾. При броске ему случайно сообщили вращение с угловой скоростью ω под углом θ ($< 90^\circ$) к большой оси мяча.

а) Определите величину и направление момента импульса (относительно большой оси мяча).

б) Чему равна угловая скорость прецессии? (Влиянием сопротивления воздуха и силы тяжести пренебречь.)

1.5.16 (14 баллов). Частица движется в поле центральной силы. Рассмотрите только радиальную часть движения.

¹⁾ У эллипсоида вращения два главных центральных момента инерции совпадают ($I_3 = I_2$). — *Прим. перев.*

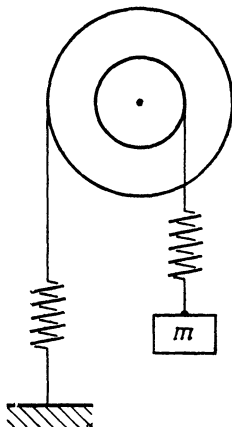
- а) Что представляет собой «эффективный» потенциал, описывающий радиальную часть движения частицы? (Нарисуйте графики этого потенциала и его составляющих.)
б) Какому условию удовлетворяет эффективный потенциал в случае кругового движения?
в) Вычислите угловую скорость кругового движения в центральном поле с потенциалом $V(r) = kr^2/2$.

I.6.1 (10 баллов). Тонкая прямоугольная пластина со сторонами a и $2a$ вращается вокруг оси, совпадающей с одной из ее диагоналей, с постоянной угловой скоростью ω .

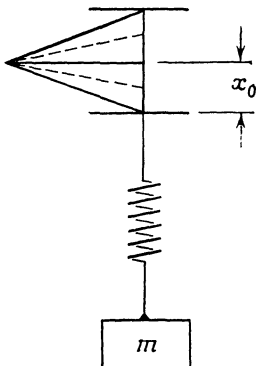
- а) Вычислите главные центральные моменты инерции.
б) Определите момент импульса и его направление.
в) Вычислите момент, действующий на ось вращения.

I.6.2 (10 баллов). Космический корабль движется по круговой орбите радиусом r_0 . Ракетный двигатель мгновенно увеличивает линейную скорость корабля на 8%. Каково расстояние до апогея новой орбиты? Нарисуйте аккуратно новую стационарную орбиту. Постройте график одномерного эффективного потенциала и покажите, как он изменился после сообщения кораблю дополнительного импульса.

I.6.3 (10 баллов). Однородный диск массой m и радиусом a вращается вокруг неподвижной оси. По внешней окружности диска проходит невесомая нить, прикрепленная с одной стороны к диску, а с другой — к пружине, противоположный конец которой закреплен неподвижно. По окружности радиусом $a/2$ проходит другая нить, которая через пружину связана с грузом, имеющим массу m . Напишите уравнения Лагранжа для диска и груза. (Уравнения не решайте.)

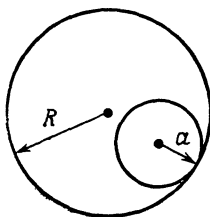


I. 6.4 (10 баллов). Груз массой m прикреплен к пружине, а пружина — к точке подвеса. Под действием внешней силы точка подвеса совершает вертикальное движение по закону $x = x_0 \cos \omega t$. Какова амплитуда стационарных колебаний груза в вязкой среде, если ее сила сопротивления равна $-b\dot{x}$?



I. 6.5 (10 баллов). Сплошной однородный цилиндр радиусом a катится без скольжения по внутренней поверхности неподвижного цилиндра большего радиуса R .

- Выпишите лагранжиан для этой системы.
- Найдите уравнение движения.
- Определите частоту малых колебаний цилиндра около положения устойчивого равновесия.



I. 6.6 (10 баллов).

- Определите радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n.$$

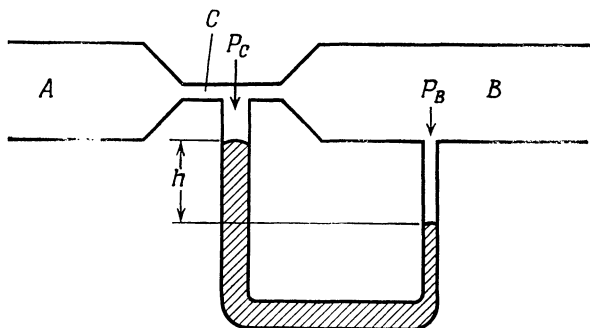
- Используя метод вычетов, докажите следующее тождество:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{(x+c)^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-a|m|} \cos mc,$$

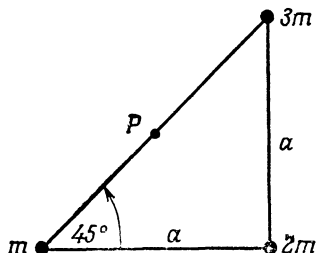
где a и c — действительные величины, причем $a > 0$.

1.6.7 (10 баллов). Спутник движется по сильно вытянутой эллиптической орбите в плоскости земного экватора. Нарисуйте эту орбиту, отметьте положение Земли и опишите влияние небольшого сопротивления атмосферы на траекторию спутника. Рассмотрите особо любые изменения, которые могут возникнуть у эксцентриситета орбиты e , периода обращения спутника T , большой полуоси орбиты a и расстояния кратчайшего сближения с Землей R_1 .

1.6.8 (10 баллов). В трубу A (см. рисунок) мощным насосом нагнетают воду. Течение ламинарное. В трубе B скорость течения равна 20 см/с . Сечение трубы B равно 6 см^2 , сечение трубки C составляет $1,0 \text{ см}^2$. Определите разность уровней h ртутного манометра.



1.6.9 (5 баллов). Три материальные точки расположены в вершинах прямоугольного треугольника, как показано на рисунке. Найдите главные моменты инерции относительно осей, проходящих через точку P , расположенную в середине гипотенузы. Укажите ориентацию главных осей относительно одной из сторон треугольника.



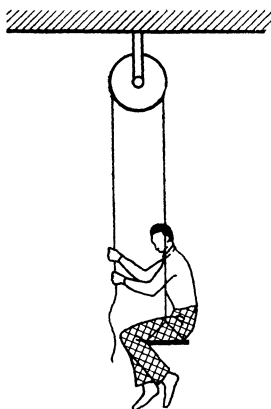
1.6.10 (10 баллов). Ребенок, едущий в поезде, держит за ниточку длиной 1 м шар, наполненный гелием. Поезд мчится со

скоростью 100 км/час по искривленному дугой пути радиусом 3 км.

- а) Каков угол отклонения нити от вертикали?
- б) На приведенном внизу рисунке отметьте направление проекции нити в горизонтальной плоскости.



I. 6.11 (5 баллов). Человек, изображенный на рисунке, весит 70 кг. Он сидит на перекладине и медленно поднимает себя, подтягивая веревку, переброшенную через блок. С какой силой он должен тянуть веревку?



I. 7.1 (20 баллов). Представьте себе, что вы ритмично хлопаете в ладони, причем промежуток времени между двумя последовательными хлопками равен T_1 . Каждый хлопок дает звук в течение весьма короткого (по сравнению с T_1) интервала времени Δt . В течение интервала времени Δt звуковое давление около вашего уха можно считать постоянным. В остальное время оно равно нулю.

- а) Покажите качественно, что дает фурье-преобразование звука хлопка. (Для этого *не нужно* выполнять непосредственно разложение в ряд Фурье.)
- б) Представьте себе, что вместо ритмично повторяющихся хлопков имеется только один хлопок длительностью Δt . Как будет выглядеть качественно фурье-преобразование в этом случае? Сравните его с предыдущим результатом.

В обоих случаях (а и б) требуется показать с помощью графиков «спектр» Фурье, т. е. показать зависимость интенсивности от частоты с соответствующими масштабными соотношениями, поясняющими качественно форму спектра.

1.7.2 (10 баллов). Даны унитарная матрица S и матрица T , связанные друг с другом соотношением $S = 1 - 2iT$. Покажите, что

а) в предельном случае, когда $|T_{ij}| \ll 1,0$, матрица T является эрмитовой и

б) для любой матрицы T справедливо следующее равенство:

$$\text{Im}(\langle a | T | a \rangle) = - \sum_n \langle n | T | a \rangle^2,$$

где $|a\rangle$ — произвольный вектор состояния в пространстве, в котором действуют операторы S и T , а $|n\rangle$ представляет полный набор таких векторов состояния.

1.7.3 (15 баллов). В кузове грузовика лежит деревянный ящик, частично загруженный кирпичом. Дно ящика — квадрат со стороной 1 м, масса ящика по сравнению с массой кирпича пренебрежимо мала. Известно, что ящик начинает скользить, если грузовик трогается с ускорением, большим чем 6 м/с^2 . До какой высоты можно уложить кирпичи в ящике без опасения, что он опрокинется при таком ускорении?

1.7.4 (15 баллов). Ящик с точными приборами поставлен на амортизирующую прокладку для защиты от вертикальных вибраций.

а) Под нагрузкой прокладка сдавливается на 6 см. Чему равен период собственных колебаний ящика?

б) Пол вибрирует с частотой 20 Гц. Каково отношение амплитуд колебаний ящика и пола?

1.7.5 (20 баллов). Капитан небольшого судна, попавшего в экваториальную штилевую полосу, решил прибегнуть к хитрости, а именно поднять якорь массой 200 кг на верх двадцатиметровой мачты. Масса остальной части судна равна 1000 кг. (Радиус Земли 6400 км.) Судно придет в движение.

а) Почему?

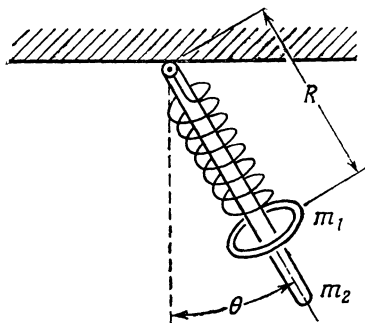
б) В каком направлении?

в) С какой скоростью?

г) Откуда берется энергия, приводящая судно в движение?

1.7.6 (20 баллов). Кольцо массой m_1 может скользить по стержню массой m_2 и длиной L , который на одном конце прикреплен к неподвижному шарниру и висит вертикально. Кольцо

связано с шарниром через невесомую пружину с жесткостью k так, что при равновесии центры масс кольца и стержня совпадают. Движение происходит в вертикальной плоскости под действием силы тяжести.



- Составьте лагранжиан системы в координатах θ и R , показанных на рисунке.
- Получите дифференциальные уравнения движения в координатах θ и R .
- Найдите одну из нормальных мод и соответствующую ей частоту колебаний (в предположении, что амплитуда колебаний мала).

1.8.1 (10 баллов). Покажите, что любая действительная и всюду аналитическая функция должна быть постоянной.

1.8.2 (10 баллов). Даны вектор $\mathbf{V}$ и тензор T :

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

на плоскости x_1, x_2 в декартовой системе координат. Вычислите компоненты вектора и тензора в новой системе координат, полученной путем поворота старой системы на $+90^\circ$ вокруг оси $x_1 \times x_2$.

1.8.3 (20 баллов). Докажите, что функция $f(r) = e^{-\alpha r}/r$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

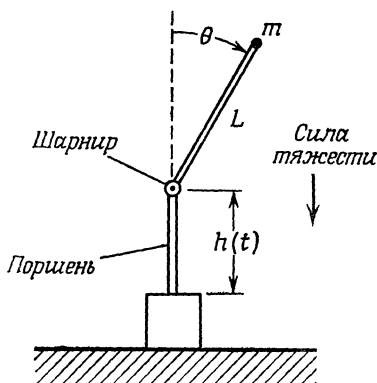
$$\nabla^2 f - \alpha^2 f = -4\pi\delta(\mathbf{r}).$$

1.8.4 (20 баллов). Составьте лагранжиан и найдите уравнение движения для системы, состоящей из материальной точки массой m , расположенной на верхнем конце невесомого стержня длиной L . Нижний конец стержня прикреплен к шарниру (тре-

ние в шарнире не учитывать). Шарнир совершает вертикальные колебания по гармоническому закону

$$h(t) = h_0 \cos \omega t.$$

Единственной степени свободы отвечает координата θ между стержнем и вертикалью. (Такую систему называют *обращенным маятником*.)



I.8.5 (20 баллов). В аэропорту, расположенном на широте экватора, имеются трое одинаковых маятниковых часов. Часы А оставляют в аэропорту, часы В помещают в самолет, отлетающий на восток, а часы З — в самолет, отлетающий на запад. Однажды точно в полдень, когда все часы показывают одно и то же время, самолеты взлетают. Самолет В облетает земной шар по экватору в восточном направлении с постоянной путевой скоростью. Самолет З облетает земной шар в западном направлении с той же путевой скоростью. На следующие сутки оба самолета прибывают в аэропорт одновременно, поскольку путевые скорости у них одинаковы. Часы А, оставленные в аэропорту, показывают в момент прибытия самолетов точно полдень, т. е. между взлетом и посадкой обоих самолетов прошло 24 ч, 0 мин и 0,00000000 с.

а) Будут ли эти трое часов по-прежнему показывать одно и то же время? Если нет, то перечислите физические причины, которые, по вашему мнению, могли бы вызвать это расхождение.

б) Примите во внимание наиболее существенную причину и определите показания часов В и З в тот момент, когда часы А в аэропорту показывают полдень (после 24-часового полета). Радиус Земли можно считать равным 6000 км.

1.8.6 (20 баллов). Согласно ньютоновской теории тяготения, гравитационный потенциал Солнца определяется (в предположении сферической симметрии) формулой

$$-\varphi = \frac{GM}{r},$$

где $G = 67 \cdot 10^{-9}$ ед. СГС (гравитационная постоянная), $GM = 1,3 \cdot 10^{26}$ ед. СГС, M — масса Солнца, r — расстояние от его центра.

- а) Получите формулу для силы, действующей на частицу массой m , удаленную от Солнца на расстояние r .
- б) По Эйнштейну, ньютоновская теория требует уточнения. Если ввести поправку первого порядка, то гравитационный потенциал можно записать в виде

$$-\varphi = \frac{GM}{r} + \frac{A}{r^2}.$$

Исходя из соображений размерностей, попытайтесь найти выражение для поправочного коэффициента A . Он должен зависеть от скорости света, а также от G и M . Хорошим считается только решение, полученное с точностью до множителя 2.

- в) Оцените относительную величину поправки (к ньютоновскому потенциалу), приняв расстояние от Солнца до Земли равным $r = 1,5 \cdot 10^{13}$ см.