

Артур Бенджамин • Майкл Шермер

МАГИЯ — ЧИСЕЛ —

МОМЕНТАЛЬНЫЕ
ВЫЧИСЛЕНИЯ В УМЕ
И ДРУГИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
ФОКУСЫ

Эту книгу хорошо дополняют:

Удовольствие от х

Стивен Строгац

Moneyball

Майкл Льюис

Гибкое сознание

Кэрол Дуэк

Branias

Кен Дженнингс

Arthur Benjamin
and Michael Shermer

SECRETS OF MENTAL MATH:

The Mathemagician's Guide to Lightning
Calculation and Amazing Math Tricks

Three Rivers Press

Артур Бенджамин
и Майкл Шермер

МАГИЯ ЧИСЕЛ

Моментальные вычисления в уме
и другие математические фокусы

Перевод с английского Владислава Ласкавого

Москва
«Манн, Иванов и Фербер»
2015

УДК 512
ББК 22.1я9
Б46

Научный редактор Александр Минько

На русском языке публикуется впервые

*Издано с разрешения Three Rivers Press, an imprint of the Crown Publishing Group,
a division of Random House LLC, a Penguin Random House Company,
и литературного агентства Synopsis*

Бенджамин Артур

Б46 Магия чисел. Ментальные вычисления в уме и другие математические фокусы / Артур Бенджамин и Майкл Шермер ; пер. с англ. В. Ласкавого. — М. : Манн, Иванов и Фербер, 2015. — 320 с.

ISBN 978-5-00057-270-2

Каждый из нас способен умножать, делить, возводить в степень и производить другие операции над большими числами в уме и с большой скоростью. Для этого не нужно решать десятки тысяч примеров и учиться годами — достаточно использовать простые приемы, описанные в этой книге. Они доступны для людей любого возраста и любых математических способностей.

Эта книга научит вас считать в уме быстрее, чем на калькуляторе, запоминать большие числа и получать от математики удовольствие.

УДК 512
ББК 22.1я9

Все права защищены.

Никакая часть данной книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме без письменного разрешения владельцев авторских прав.

Правовую поддержку издательства обеспечивает юридическая фирма «Вегас-Лекс».

VEGAS LEX

© Arthur Benjamin and Michael Shermer, 2006

© Перевод на русский язык, издание на русском языке, оформление. ООО «Манн, Иванов и Фербер», 2015

ISBN 978-5-00057-270-2

Оглавление

Предисловие	11
Пролог	19
Введение.....	23
Глава 0. Быстрые трюки: простые (и впечатляющие) вычисления	25
Глава 1. Небольшой обмен любезностями: устное сложение и вычитание	35
Глава 2. Произведения растроченной юности: основы умножения	52
Глава 3. Усовершенствованные произведения: умножение среднего уровня.....	76
Глава 4. Разделяй и властвуй: деление в уме	101
Глава 5. Искусство приближенной оценки.....	128
Глава 6. Математика с ручкой и бумагой	154
Глава 7. Запоминающаяся глава для запоминания чисел.....	174

Глава 8. Сложное делаем легким: продвинутое умножение	187
Глава 9. Искусство математической магии.....	223
Глава ∞. Эпилог: как математика помогает задуматься о странных вещах	247
Ответы.....	259
Библиография.....	300
От авторов	304
Об авторах	305

Я посвящаю эту книгу моей жене Дине
и дочерям Лорел и Ариэль.
Артур Бенджамин

Посвящается Ким — моей жене и самому
доверенному личному советчику и помощнику.
Майкл Шермер

Предисловие

Мне нравится размышлять о тех людях, которым первым пришла в голову мысль считать вещи. Наверное, они сразу заметили, что счет на пальцах отлично работает. Может быть, какой-нибудь древний человек по имени Ог (родившийся еще до потопа) или один из его приятелей сказал: «Нас тут один, два, три, четыре, пять. Значит, нам нужно пять кусочков фрукта. — И добавил: — Смотри-ка, ты на своих пальцах можешь сосчитать количество человек у костра, птиц на дереве, камней в ряду, поленьев в костре, виноградин в грозди». Так было положено отличное начало для развития математики. Вы, вероятно, тоже впервые встретились с числами подобным образом.

Должно быть, вы слышали, что математика — это язык науки, а природа говорит на языке математики. Что ж, это правда. Чем больше мы понимаем Вселенную, тем больше математических связей в ее устройстве обнаруживаем. Цветы располагаются на стебле по винтовой линии, причем их количество на разной высоте совпадает с определенной последовательностью чисел (чисел Фибоначчи), которую несложно понять; к тому же любой самостоятельно ее высчитает. Узоры на раковине образуют совершенные математические кривые (логарифмические спирали), появившиеся вследствие определенных химических процессов. Скопления звезд тянутся друг за другом в математическом танце, и его можно наблюдать на расстоянии миллионов и даже миллиардов километров.

В течение многих столетий подтверждается и открывается математическая сущность Природы. Однако с каждым новым открытием кто-то должен взять на себя труд удостовериться, что числа не лгут. Эта книга поможет вам разобраться в этом. Освоив вычисления, вы узнаете ряд математических секретов природы, и трудно представить, куда это может вас привести!

При знакомстве с числами вы поймете: ответ на самом деле лежит на кончиках ваших пальцев. Это не шутка: именно с этого все и начинается. Поскольку у человека десять пальцев, математическая наука взяла за основу цифры от 1 до 10. По сути, мы называем и числа, и пальцы словом «цифры»*. Совпадение? Вряд ли. Нашим далеким предкам очень скоро стало недоставать пальцев для счета. То же самое, вероятно, произошло и с вами. Мы не можем просто игнорировать большие числа и пенять при этом на свои руки (шутка!).

Мы нуждаемся в числах, так как они часть повседневной жизни, хотя порой мы этого даже не замечаем. Подумайте о телефонной беседе с другом: чтобы позвонить, нужен номер телефона; время, потраченное на разговор, тоже измеряется в числах (в часах и минутах). Каждая историческая дата, включая такую важную, как ваш день рождения, обозначается цифрами. Числа мы используем и для презентации идей, которые на первый взгляд не имеют ничего общего с расчетами. Например, выражение «Как молодо вы выглядите!» явно подразумевает информированность о вашем возрасте, выраженном в числовом эквиваленте, а также оценку вашего внешнего вида тоже в виде числа. Люди часто описывают друг друга с помощью чисел, отображающих рост и вес человека.

* В английском языке слово *digit* имеет два значения: «палец» и «цифра». *Прим. пер.*

И конечно, мы все хотим знать, сколько денег у нас есть или сколько стоит та или иная вещь в числовом выражении: в долларах, песо, юанях, рупиях, рублях, евро или иенах.

Если по какой-то причине вы пока еще не влюблены в математику, читайте эту книгу. Конечно, как человек науки я надеюсь, что вам понравится эта дисциплина. Хотя больше всего мне хотелось бы, чтобы вы ее *полюбили*. Что бы вы ни чувствовали по отношению к ней (ненависть или любовь), я все равно готов поспорить: вы часто будете ловить себя на мысли, что хотите узнать ответ сразу, без того чтобы сначала старательно все записать и усердно работать (или даже не тратя время на то, чтобы взять калькулятор). Вы мечтаете, чтобы ответ появился «по мановению волшебной палочки». Оказывается, множество математических задач решаются именно таким магическим образом. И книга продемонстрирует вам, как это делается.

Что делает любую магию столь интригующей и увлекательной? Зрители не часто могут похвастаться тем, что понимают, как выполняется трюк. «Как она это сделала? Не знаю, но это круто!» Так вот, приемы и методы из этой книги сродни волшебству. Публика редко бывает осведомлена о секретах трюков — она просто ценит их. Заметьте, что магия вряд ли чего-то стоит, если никто не смотрит представление. Но знание того, как работает *магия чисел*, не лишает вас увлекательной интриги. Простая арифметика не позволит вам увязнуть в вычислениях, и вы сможете сосредоточиться на прекрасной природе чисел. В конце концов, математика — двигатель Вселенной.

Доктор Бенджамин занялся быстрыми вычислениями ради забавы. Полагаю, этим он поразил своих учителей и одноклассников. Иллюзионисты могут заставить публику думать, что они обладают сверхъестественными способностями.

Волшебники от математики создают иллюзию своей гениальности. Способность обратить внимание окружающих на то, что вы делаете, представляет собой часть обмена идеями. Если вы произвели на людей впечатление, они будут слушать то, что вы говорите. Так что попробуйте немного поупражняться в магии чисел. Вы можете произвести впечатление на друзей? Отлично! Но вы также будете «выступать для себя» и поймете, что в состоянии решать задачи, которые, как вы полагали раньше, вам не по зубам. Вы придете в восторг *от самого себя*.

Но счет на пальцах — совсем другое дело. Вы когда-нибудь замечали, что считаете вслух, или что-то шепчете, или издаете еще какие-то звуки во время вычислений? Это почти всегда упрощает расчеты. Проблема, однако, в том, что окружающие думают, будто вы ведете себя немножко странно. Так вот, в «Магии чисел» доктор Бенджамин научит вас использовать функцию «говорю вслух» так, чтобы сделать решение задач более простым и быстрым, а ответы — точными (что удивительно). И все это будет «выдаваться» вашим мозгом в процессе обдумывания задачи (как будто вы думаете вслух).

Вы станете перемещаться по математическим задачкам так же, как мы читаем: слева направо. Вы будете щелкать сложные задания как орешки, выдавая результат с погрешностью в пределах процента или около того. Вы научитесь быстро выполнять арифметические действия. Таким образом, вы сможете приятно провести время, размышляя о том, что означают цифры. Ог задумался над вопросом: «Достаточно ли у нас фруктов для каждого человека, сидящего у костра? Если нет, то могут возникнуть проблемы». Теперь вы можете спросить: «Достаточно ли места на этом компьютере, чтобы отслеживать мои музыкальные файлы или банковский счет? Если нет, то могут возникнуть проблемы».

Предисловие

Это книга больше о секретах математики, чем просто о подсчетах. Например, вы научитесь определять, на какой день недели придется или приходилась та или иная дата. Это просто фантастика, почти волшебство, когда вы в состоянии сказать кому-либо, в какой день недели он родился. Это действительно невероятно, если вы способны вычислить, что Соединенные Штаты Америки отмечали свой первый День независимости в четверг 4 июля 1776 года; что 15 апреля 1912 года — день гибели «Титаника» — был понедельник; что первый человек ступил на Луну 20 июля 1969 года, в воскресенье. Вы никогда не забудете, что террористическая атака на США произошла 11 сентября 2001 года. С помощью магии чисел вы всегда сумеете доказать, что это случилось во вторник.

Существующие в природе взаимосвязи лучше всего описывают именно числа. Один, два, три и далее до десяти — эти числа вы можете посчитать на пальцах. Но между ними есть еще бесконечное количество чисел. Это дроби. Некоторые числа никогда не заканчиваются. Они становятся настолько большими, насколько вы пожелаете, и настолько маленькими, что их трудно себе представить. Вы, должно быть, знакомы с ними. «Магия чисел» позволит вам так быстро доставать их из ума, что у вас в нем останется еще достаточно места для размышлений о сложившемся устройстве мира. В общем эта книга покажет вам, что все в природе имеет смысл.

*Билл Найя,
Science Guy®*



Математика — прекрасный, элегантный и чрезвычайно полезный язык с собственными лексикой и синтаксисом, глаголами, существительными и определениями, диалектами и местными наречиями. Он с блеском используется одними людьми и с трудом — другими. Многие из нас боятся исследовать скрытые возможности его применения, тогда как некоторые пускают его в ход, словно меч, чтобы атаковать и покорять налоговые декларации или массивы данных, сопротивляющиеся менее храбрым людям. Возможно, эта книга не превратит вас в Лейбница, не возведет в ранг профессора алгебры, но, надеюсь, способствует появлению у вас нового, волнующего и даже занимательного взгляда на то, что можно делать с числами.

Мы все думаем, что знаем достаточно об арифметике, чтобы сводить концы с концами, и, конечно, не чувствуем вины за то, что при каждом удобном случае обращаемся к карманному калькулятору, который стал неотъемлемой частью нашей жизни. Но так же, как фотография может скрыть истинную красоту картины Вермеера, а электронная клавиатура — стать причиной того, что мы забудем великолепное исполнение Горовица, чрезмерное доверие к технологиям способно лишить удовольствия, которое вы получите при изучении математики на этих страницах.

Я помню, какое наслаждение испытал в детстве, когда мне открылось, что можно умножать на 25, просто прибавляя два нуля к исходному числу и деля это новое число на 4. Метод сравнений по модулю 9 для проверки результатов умножения был следующим захватывающим этапом. А когда я узнал о перекрестном умножении, то уже был на крючке и ненадолго превратился в невыносимого одержимого математикой.

Прививки против такого недуга не существовало. Приходилось лечить себя самому. Так что будьте осторожны!

Вы не держали бы сейчас в руках эту книгу, если бы у вас не было желания улучшить свои математические навыки либо удовлетворить любопытство по отношению к этому увлекательному предмету. Так же как и при использовании любой инструкции, вы сможете удерживать в памяти и применять только определенный процент разнообразных трюков и методов, описанных здесь. Но даже это оправдывает время, потраченное на чтение этой забавной книги.

Я знаю обоих авторов довольно хорошо. Арт Бенджамин не только один из числа тех одаренных детей, на которых учителя постоянно ворчали в школе, но, как известно, и актер «Волшебного замка» в Голливуде, где он демонстрирует свои навыки (однажды Арт отправился в Токио, чтобы там в прямом эфире помериться математическими способностями с женщиной-ученым). Майкл Шермер, с его специальными научными познаниями, имеет отличное представление о практическом применении математики (о том, как она используется в реальном мире).

Если это ваше первое знакомство с такого рода полезным математическим материалом, то я вам завидую. Открывая каждый восхитительный способ по-новому атаковать цифры, вы обнаружите, что упустили что-то в школе. Математика, в особенности арифметика, — мощный и надежный инструмент для повседневного использования, позволяющий нам управляться с жизнью более уверенно и точно. Позвольте Арту и Майклу показать вам, как округлить некоторые из углов и срезать неровности на вашем практическом пути. Вспомните слова доктора Сэмюэля Джонсона, человека

Магия чисел

в высшей степени практичного во всех отношениях: «Изучение арифметики служит развлечением в моменты одиночества благодаря процессу решения и способствует укреплению репутации на публике благодаря эффектности».

В общем наслаждайтесь книгой. Пусть она развлечет и развеселит вас. Все, чего вы можете желать от жизни, — это совершать хорошие поступки время от времени и иногда съесть кусочек пиццы (без анчоусов!) в компании добрых друзей. Ну, или почти все... Может быть, еще «Феррари».

Джеймс Рэнди

Пролог

Мой хороший друг доктор Артур Бенджамин, профессор математики в колледже Harvey Mudd в Клермонте, выходит на сцену под шквал аплодисментов публики «Волшебного замка», знаменитого клуба магов в Голливуде, где он собирается демонстрировать «магию чисел» или, как он это называет, искусство быстрых устных вычислений. Арт никоим образом не выглядит как профессор математики из престижного колледжа. Удивительно находчивый, он похож на остальных молодых иллюзионистов и магов, которые представляют именитый клуб. Особенным Арта делает то, что он может выступать перед любой группой людей, в том числе перед профессиональными математиками и магами, потому что умеет то, на что мало кто способен. Артур Бенджамин складывает, вычитает, умножает и делит числа в уме быстрее, чем калькулятор. Он может возводить в квадрат двузначные, трехзначные и четырехзначные числа, а также находить квадратные и кубические корни, не записывая ничего на бумаге. А еще он готов научить вас выступать с собственной математической магией.

Традиционно маги отказываются раскрывать свои секреты, считая, что если вы будете их знать, таинственность и очарование их искусства будут утрачены. Но Арт стремится вызвать у людей интерес к математике. Он понимает, что лучший способ сделать это — посвятить читателей в секреты

«математического гения». С этими навыками любой человек сможет повторить то, что демонстрирует Артур Бенджамин на сцене.

Это особая ночь в «Волшебном замке». Арт начинает с вопроса о том, есть ли у кого-нибудь в аудитории калькулятор. Группа инженеров поднимает руки и присоединяется к Арту на сцене. Предлагая проверить калькуляторы, чтобы убедиться в том, что они работают, Арт просит человека из зала назвать двузначное число. «Пятьдесят семь!» — кричит тот. Арт указывает на другого, который произносит: «Двадцать три».

Обращаясь к людям на сцене, Арт говорит: «Умножьте 57 на 23 с помощью калькулятора и убедитесь, что получилась 1311, иначе устройство работает неправильно», и терпеливо ждет, пока добровольцы закончат ввод чисел. После того как каждый участник подтверждает, что его калькулятор выдал результат 1311, аудитория издает вздох. Удивительный Арт обыграл калькуляторы в их собственной игре!

Далее Арт сообщает, что возведет в квадрат четыре двузначных числа быстрее, чем «кнопкодавы» сделают это на своих калькуляторах. Аудитория просит его возвести в квадрат числа 24, 38, 67 и 97. Крупно и четко, чтобы все было видно, Арт пишет на доске цифры: 576, 1444, 4489 и 9409 — и разворачивается к инженерам-добровольцам с просьбой огласить результаты, полученные на калькуляторах. Их ответ вызывает удивление, а затем аплодисменты аудитории: «576, 1444, 4489, 9409». Женщина рядом со мной сидит с открытым от изумления ртом.

После этого волшебник Арт предлагает возвести в квадрат трехзначное число, даже не записывая ответ. «Пятьсот семьдесят два!» — выкрикивает мужчина из зала. Ответ Арта доносится меньше чем через секунду: «572 в квадрате будет

327 184». Он незамедлительно указывает на другого представителя аудитории, который называет число «389», и невозмутимо произносит: «389 в квадрате равно 151 321». Кто-то еще выпаливает «262». «68 644», — оперативно выдает Арт. И, чувствуя, что затянул на какое-то мгновение с последним ответом, обещает компенсировать это со следующим числом. Вызов поступил: 991. Без паузы Арт возводит это число в квадрат: «982 081». Звучит еще несколько трехзначных чисел, и Арт отвечает безупречно. Зрители в аудитории качают головами, не в силах поверить в происходящее.

Покорив аудиторию, Арт заявляет, что предпримет попытку возвести в квадрат четырехзначное число. Женщина выкрикивает: «1306», и Арт мгновенно отвечает: «1 073 296». Аудитория смеется, а Арт объясняет: «Нет-нет. Это слишком просто. Я не рассчитываю на то, что одержу победу над калькуляторами в этом упражнении. Давайте попробуем другой пример». Мужчина предлагает «2843». Делая небольшую паузу между цифрами, Арт отвечает: «Итак, квадрат этого числа должен составлять 8 миллионов... 82 тысячи... 649». Он прав, конечно, и публика взрывается аплодисментами так же громко, как и во время выступления предыдущего мага, который распилил женщину пополам и заставил исчезнуть собаку. Так происходит везде, где бы Артур Бенджамин ни появился: в классе старшей школы, колледже, на профессиональной конференции, в «Волшебном замке» или телевизионной студии.

Профессор Бенджамин выступал со своей магией особого рода по всей стране и в прямом эфире многочисленных телевизионных ток-шоу. Он был предметом исследования по когнитивной психологии Университета Карнеги—Меллона и отмечен в научной книге Стивена Смита *The Great Mental Calculators: The Psychology, Methods, and Lives of Calculating*

Prodigies, Past and Present. («Великие ментальные вычислители: психология, методы и жизнь вундеркиндов вычислений, прошлое и настоящее»). Арт родился в Кливленде 19 марта 1961 года (по его подсчетам, в воскресенье; этому навыку он обучит вас в главе 9). Он был гиперактивным ребенком, доводил учителей до иступления своими выходками, зачастую сводившимися к исправлению математических ошибок, допускаемых ими время от времени. На протяжении всей книги параллельно с обучением математическим секретам Арт вспоминает, когда и где он узнал об этих секретах. Так что я предоставляю возможность поведать эти увлекательные истории ему самому.

Арт Бенджамин — личность экстраординарная. Он придумал необыкновенную программу обучения методам быстрых устных вычислений. Я утверждаю это без тени сомнения и прошу помнить: эта информация поступает не от парочки ребят, сулящих вам чудеса, «если только вы позвоните по нашей горячей линии». Мы с Артом — дипломированные специалисты в области самых консервативных академических дисциплин: Арт в математике, я в истории науки. И мы никогда не подвергли бы себя риску оконфузиться (или что-нибудь похуже), делая столь громкие заявления, если бы не были уверены в них на сто процентов. Словом, метод работает, и практически каждый может ему научиться, потому что мастерство «математического гения» — навык приобретаемый. Итак, вы можете рассчитывать на то, что разовьете свои математические способности, произведете впечатление на друзей, улучшите свою память и изрядно повеселитесь!

Майкл Шермер

Введение

Я всегда любил упражняться с числами, и в этой книге поделюсь своей страстью с вами. Числа казались мне наделенными определенной магической притягательностью, и я проводил огромное количество времени, развлекая себя и других с помощью их великолепных свойств. Будучи подростком, я выступал в качестве мага, а позже объединил свою увлеченность математикой и магией в полнометражном шоу под названием *Mathemagics* («Математическая магия»), в рамках которого хотел продемонстрировать и объяснить секреты быстрых устных вычислений зрителям всех возрастов.

После защиты диссертации я преподавал математику в колледже Harvey Mudd и до сих пор наслаждаюсь тем, что разделяю радость от общения с числами с детьми и взрослыми во всем мире. В этой книге я поделюсь с вами всеми своими секретами, касающимися быстрого выполнения математических действий в уме. (Конечно же, волшебники не должны раскрывать секреты, но у *математической магии* другие правила. Математика должна вселять благоговение, а не пугать своей таинственностью.)

Какую пользу принесет вам эта книга? Вы научитесь производить математические действия в уме быстрее, чем могли себе представить. После небольшой практики вы значительно улучшите свою память на числа. Вы изучите способы делать быстрые вычисления, которые поразят ваших друзей, коллег

и учителей. К тому же начнете рассматривать математику как весьма занимательный вид деятельности.

Слишком часто эта наука преподается как набор жестких правил, где нет места для творческого мышления. Но как вы узнаете из нашей книги, обычно у одной проблемы бывает несколько решений. Большие задачи можно разделить на меньшие, более «покладистые» составляющие. Мы будем выискивать характерные детали, чтобы облегчить вам решение задач. Мне это кажется ценным жизненным уроком, который можно использовать при поиске решения всех видов проблем, как математических, так и любых других.

«Но разве талант к математике не дается от рождения?» Мне часто задают этот вопрос. Многие люди убеждены, что молниеносные вычислители необыкновенно одарены. Может быть, у меня действительно есть повышенный интерес к тому, как что-либо работает, будь то задача по математике или фокус. Но я уверен, основываясь на многолетнем опыте преподавания, что «скоростная» математика — это навык, которым может овладеть любой человек. Но он требует практики и приверженности, если вы хотите стать экспертом в этом деле. А для получения результатов важно придерживаться правильного пути. Позвольте же мне указать вам его!

Глава 0

Быстрые трюки: простые (и впечатляющие) вычисления

Далее вы узнаете, как быстро выполнять математические действия в уме. После непродолжительной практики и освоения методов этой книги ваша способность работать с числами значительно улучшится. После более продолжительной практики вы сможете считать быстрее, чем с помощью калькулятора. В этой главе я научу вас нескольким простым (но впечатляющим) вычислениям, которые вы можете освоить незамедлительно. Более серьезные вещи оставим на потом.

МГНОВЕННОЕ УМНОЖЕНИЕ

Давайте начнем с одного из моих любимых трюков: как умножать в уме любое двузначное число на 11. Это очень легко, если вы знаете секрет.

Представьте следующую задачу:

$$32 \times 11$$

Для ее решения нужно просто сложить цифры $3 + 2 = 5$, а затем поместить пятерку между двойкой и тройкой. Вот и наше решение:

$$352$$

Что может быть легче? Теперь попробуйте

$$53 \times 11$$

Поскольку $5 + 3 = 8$, ответ достаточно прост:

$$583$$

Еще пример. Не подглядывая и не записывая, скажите, чему равно:

$$81 \times 11?$$

У вас получилось 891? Поздравляю!

Но пока не слишком воодушевляйтесь: я показал лишь половину того, что необходимо знать. Допустим, задача такая:

$$85 \times 11$$

Несмотря на то что $8 + 5 = 13$, ответ НЕ 8135!

Как и прежде цифра 3 ставится между цифрами 8 и 5, но 1 добавляется к цифре 8 для получения правильного ответа 935.

Представляйте задачу следующим образом:

$$\begin{array}{r} 1 \\ \underline{835} \\ 935 \end{array}$$

Вот еще пример. Попробуйте перемножить 57×11 .

Так как $5 + 7 = 12$, ответ:

$$\begin{array}{r} 1 \\ \underline{527} \\ 627 \end{array}$$

Теперь ваша очередь. Как можно быстрее, подсчитайте, сколько будет

$$77 \times 11?$$

Быстрые трюки: простые (и впечатляющие) вычисления

Если вы получили ответ 847, можете себе поаплодировать. Вы на пути к превращению в математика.

Мне известно по опыту, что если вы скажете другу или учителю, что способны в уме умножить любое двузначное число на 11, просьба умножить 99 на 11 не заставит себя долго ждать. Поэтому решим эту задачку прямо сейчас, чтобы вы были готовы.

Так как $9 + 9 = 18$, ответ таков:

$$\begin{array}{r} 1 \\ \underline{989} \\ 1089 \end{array}$$

Хорошо попрактикуйте свой новый навык какое-то время, а затем проведите шоу перед друзьями. Вы будете удивлены реакцией, которую вызовет ваше умение (раскрывать или нет свои секреты — решайте сами).

Итак, к этому моменту у вас, должно быть, появилось несколько вопросов, скажем:

Можно ли использовать этот метод для умножения трехзначных (или более «значных») чисел на 11?

Безусловно. Например, для задачи 314×11 ответ все еще будет начинаться с 3 и заканчиваться на 4. Так как $3 + 1 = 4$ и $1 + 4 = 5$, ответ будет равен 3454. Но мы пока отложим задачи посерьезнее на потом.

Вероятно, вы уже спрашиваете себя:

Конечно, замечательно, что таким способом можно умножать на 11. Но как насчет других чисел? Как умножить числа на 12, 13 или 36?

Мой ответ: «Терпение!» Об этом рассказывается дальше. В главах 2, 3, 6 и 8 вы изучите методы умножения, позволяющие перемножать любые два числа. При этом вам не придется

запоминать специальные правила для каждого случая. Нескольких методов — вот и все, что вам понадобится для быстрого умножения чисел в уме.

ВОЗВЕДЕНИЕ ВО ВТОРУЮ (В КВАДРАТ) И БОЛЬШИЕ СТЕПЕНИ

Вот еще один трюк.

Как вы, наверное, знаете, квадрат числа — это заданное число, умноженное само на себя. Например, квадратом 7 будет 7×7 , то есть 49. Позже я научу вас простому способу, который позволит без труда вычислять квадрат любого двузначного и трехзначного (и состоящего из большего количества знаков) числа.

Этот метод особенно легко применять, если число заканчивается на 5. Поэтому опробуем его прямо сейчас.

1. Ответ должен *начинаться* с результата умножения первой цифры возводимого в квадрат числа на цифру, большую на единицу, чем первая цифра.
2. Ответ *заканчивается* на 25.

Например, чтобы возвести в квадрат число 35, мы просто умножаем первую цифру (3) на 4, то есть на единицу большую цифру, после чего добавляем 25. Так как $3 \times 4 = 12$, следовательно, ответ — 1225. Таким образом, $35 \times 35 = 1225$. Прделанные шаги можно представить следующим образом:

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 35 \\ \hline 3 \times 4 = 12 \\ 5 \times 5 = \underline{25} \\ \text{Ответ: } 1225 \end{array}$$

Быстрые трюки: простые (и впечатляющие) вычисления

Как насчет возведения в квадрат числа 85? Так как $8 \times 9 = 72$, мы мгновенно получаем ответ: $85 \times 85 = 7225$.

$$\begin{array}{r} 85 \\ \times 85 \\ \hline 8 \times 9 = 72 \\ 5 \times 5 = \underline{25} \\ \hline \text{Ответ: } 7225 \end{array}$$

Можно применить похожий прием при умножении двузначных чисел, начинающихся с одинаковых первых цифр, сумма вторых цифр которых равняется 10. Ответ будет состоять из числа, полученного с помощью вышеописанного метода (первая цифра умножается на цифру, на единицу большую), и произведения вторых цифр чисел, участвующих в умножении. Например, попробуем умножить 83 на 87. (Оба числа начинаются на 8, а сумма последних цифр $3 + 7 = 10$.) Так как $8 \times 9 = 72$ и $3 \times 7 = 21$, ответ — 7221.

$$\begin{array}{r} 83 \\ \times 87 \\ \hline 8 \times 9 = 72 \\ 3 \times 7 = \underline{21} \\ \hline \text{Ответ: } 7221 \end{array}$$

Подобным образом получаем из $84 \times 86 = 7224$.

Теперь ваша очередь. Попробуйте вычислить 26×24 .

С чего начинается ответ? С $2 \times 3 = 6$. Чем заканчивается? $6 \times 4 = 24$. Значит, $26 \times 24 = 624$.

Помните, что использовать этот метод можно, только если первые цифры чисел одинаковы, а последние дают в сумме 10. Итак, мы можем применить этот метод, чтобы мгновенно вычислить:

$$31 \times 39 = 1209$$

$$32 \times 38 = 1216$$

$$33 \times 37 = 1221$$

$$34 \times 36 = 1224$$

$$35 \times 35 = 1225$$

Вы можете спросить:

Что делать, если последние цифры не дают в сумме 10? Мы все равно можем использовать этот прием, чтобы умножить 22 на 23?

Пока еще нет. Но в главе 8 я покажу вам простой способ решения таких задач с применением метода «совместной близости» (для вычисления 22×23 нужно умножить 20×25 , прибавить 2×3 и получите $500 + 6 = 506$; но это я забегаю наперед!). Вы не только научитесь использовать данные методы, но и поймете принципы их работы.

Часто мне задают еще такой вопрос:

Существуют какие-либо методы устного сложения и вычитания?

Конечно, и этому посвящена вся следующая глава. Если бы меня заставили описать свой прием в двух словах, я бы сказал: «Слева направо». (Вот вы украдкой и получили анонс будущего.)

Представьте следующую задачу на вычитание:

$$\begin{array}{r} 1241 \\ - 587 \\ \hline \end{array}$$

Большинству людей не понравится решать подобные задачки в уме (и даже на бумаге!), но давайте все упростим. Вместо того чтобы вычесть 587, вычтем 600. Так как $1200 - 600 = 600$, получаем следующее:

Быстрые трюки: простые (и впечатляющие) вычисления

$$\begin{array}{r} 1241 \\ - 600 \\ \hline 641 \end{array}$$

Но мы вычли на 13 больше. (В главе 1 показано, как быстро определить «13».) Таким образом, наш пример, на который было больно смотреть, превращается в простую задачу на сложение:

$$\begin{array}{r} 641 \\ + 13 \\ \hline 654 \end{array}$$

довольно легко решаемую в уме (в особенности слева направо). Итак, $1241 - 587 = 654$.

Используя немножко магии чисел, описанной в главе 9, вы сможете мгновенно вычислить сумму десяти чисел, представленных ниже:

$$\begin{array}{r} 9 \\ 5 \\ 14 \\ 19 \\ 33 \\ 52 \\ 85 \\ 137 \\ 222 \\ + 359 \\ \hline 935 \end{array}$$

Хотя я не стану раскрывать магический секрет прямо сейчас, сделаю небольшой намек. Полученный ответ 935 уже появлялся в этой главе. Еще больше трюков для вычислений

на бумаге вы найдете в главе 6. Более того, вы будете в состоянии быстро назвать частное двух следующих чисел:

$$359 \div 222 = 1,61 \text{ (первые три цифры)}$$

Нам еще многое предстоит узнать о делении (включая обычные и десятичные дроби) в главе 4.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПРАКТИЧЕСКИЕ СОВЕТЫ

Вот быстрый совет для подсчета чаевых*. Предположим, в ресторане вам выставили счет на 42 доллара, и вы захотели оставить чаевые в размере 15%. Сначала вычисляем 10% от 42, что равняется 4,20. Сократив это число наполовину, получаем 2,10, что представляет собой 5% от вашего счета. Складываем эти числа; их сумма (6,30) и будет составлять 15%. Мы обсудим стратегии вычисления налога с продаж, скидок, сложных процентов и другие практические вопросы в главе 5. Причем все это наряду со способами, которые можно использовать для быстрых устных вычислений, если нет необходимости в точных расчетах.

УЛУЧШАЙТЕ ПАМЯТЬ

В главе 7 вы изучите полезную технику запоминания чисел, которая поможет в учебе и не только. Используя легкую для понимания систему преобразования чисел в слова, вы сможете быстро и без труда запоминать любые числа: даты, телефонные номера — все, что захотите.

* Английское слово tip имеет несколько значений: в данном предложении оно используется дважды: как «совет» и как «чаевые». *Прим. пер.*

Быстрые трюки: простые (и впечатляющие) вычисления

Что касается календарных чисел, то как вы смотрите на то, чтобы научиться выяснять день недели любой даты? Это пригодится для вычисления дней рождения, исторических событий, запланированных в будущем встреч и тому подобного. Я расскажу об этом в деталях позже, а пока предлагаю простой способ определения дня недели 1 января любого года в XXI веке. Сначала ознакомьтесь с представленной таблицей.

Поне- дельник	Вторник	Среда	Четверг	Пятница	Суббота	Воскре- сенье
1	2	3	4	5	6	7 или 0

Например, давайте выясним, каким днем недели будет 1 января 2030 года. Возьмите две последние цифры года и представьте себе, что это ваш счет в ресторане (в данном случае 30 долларов.) Теперь добавьте 25% чаевых, но излишки в центах оставьте себе. (Это можно вычислить, дважды разделив счет пополам и отбросив всю «мелочь». Половина от 30 равна 15, а половина от 15 — 7,50. Оставив излишки себе, получим чаевые в размере 7 долларов.) Отсюда следует, что ваш счет плюс чаевые составляет 37 долларов. Чтобы определить день недели, вычитаем из этой суммы наиболее близкое к ней (но не большее) произведение числа 7 (0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, ...) и получаем в результате порядковый номер дня. В данном примере, $37 - 35 = 2$, значит, 1 января 2030 года приходится на второй день недели, то есть на вторник.

Счет: 30

Чаевые: + 7

37

Произведение цифры 7: - 35

2 = вторник

Какой день недели 1 января 2043 года?

Счет: 43

Чаевые: + 10

53

произведение цифры 7: - 49

4 = четверг

Исключение: если год високосный, уберите 1 доллар из суммы чаевых, высчитанных ранее. Например, для 1 января 2032 года 25% от счета на 32 доллара будут равны 8 долларам чаевых. Вычитание 1 дает в итоге $32 + 7 = 39$. Вычитание наибольшего по отношению к сумме счета произведения 7 дает $39 - 35 = 4$. Итак, 1 января 2032 года приходится на четвертый день недели, четверг. За полной информацией, которая позволит определить день недели для любой исторической даты, обращайтесь к главе 9. (Кстати, совершенно естественно начать чтение книги именно с нее!)

Я знаю, о чем вы сейчас думаете:

Почему этому не учат этому в школе?

Боюсь, на некоторые вопросы даже я не знаю ответа. Вы готовы освоить еще больше волшебной математики? Так чего мы ждем? Вперед!

Глава 1

Небольшой обмен любезностями: устное сложение и вычитание

Сколько себя помню, мне всегда было легче складывать и вычитать слева направо, нежели справа налево. Поступая таким образом, я выяснил, что могу выкрикнуть ответ на математическую задачку раньше, чем одноклассники запишут условия. А мне не нужно было даже записывать!

В этой главе вы научитесь методу «слева направо», используемому для устного сложения и вычитания большинства чисел, с которыми мы сталкиваемся каждый день. Эти умственные навыки важны не только для выполнения математических трюков из данной книги, но и незаменимы во время учебы в школе, трудовой деятельности и в других ситуациях, когда вам нужно оперировать числами. В скором времени вы сможете отправить свой калькулятор на заслуженный отдых и начать задействовать мозг в полную силу, складывая и вычитая двузначные, трехзначные и даже четырехзначные числа с молниеносной скоростью.

СЛОЖЕНИЕ СЛЕВА НАПРАВО

Большинство из нас обучены проводить письменные вычисления справа налево. И это нормально для счета на бумаге. Но у меня есть достаточно много убедительных аргументов,

объясняющих, почему это лучше делать слева направо, чтобы считать *в уме* (то есть *быстрее*, чем на бумаге). В конце концов, числовую информацию вы читаете слева направо, произносите числа тоже слева направо, поэтому и думать о числах (и считать их) более естественно слева направо. Вычисляя ответ справа налево, вы генерируете его в обратном направлении. Это и делает вычисления в уме такими сложными. К тому же, чтобы просто оценить результат вычислений, важнее знать, что он «чуть больше 1200», чем то, что он «заканчивается на 8».

Итак, применяя метод слева направо, вы начинаете решение с самых значимых цифр вашего ответа. Если вы привыкли работать на бумаге справа налево, то вам может показаться неестественным новый подход. Но с практикой к вам придет понимание, что это самый эффективный способ для устных вычислений. Хотя, возможно, первый набор задач — сложение двузначных чисел — и не убедит вас в этом. Но проявляйте терпение. Если будете следовать моим рекомендациям, то скоро поймете, что единственным легким путем к решению задач на сложение трехзначных (и более «значных») чисел, всех задач на вычитание, умножение и деление является метод слева направо. Чем раньше вы приучите себя действовать так, тем лучше.

Сложение двузначных чисел

Прежде всего я исхожу из того, что вы знаете, как складывать и вычитать числа, состоящие из одной цифры. Мы начнем со сложения двузначных чисел, хоть я и подозреваю, что вы неплохо умеете делать это в уме. Однако следующие упражнения все равно станут для вас хорошей практикой, так как навыки сложения двузначных чисел, которые вы приобретете в итоге,

понадобятся для решения более трудных задач на сложение, как, впрочем, и для почти всех задач на умножение, предложенных в следующих главах. В этом проиллюстрирован фундаментальный принцип устной арифметики, а именно: «упрощай задачу, разбивая ее на меньшие, проще решаемые». Это ключ практически к каждому методу, представленному в данной книге. Перефразируя старую поговорку, есть три составляющие успеха: упрощай, упрощай и упрощай.

Самые легкие задачи на сложение двузначных чисел — те, которые не требуют от вас держать в уме какие-либо цифры (то есть когда первые две цифры в сумме дают 9 или меньше или сумма последних двух цифр равна 9 и меньше). Например:

$$\begin{array}{r} 47 \\ + 32 \quad (30 + 2) \end{array}$$

Чтобы сложить $47 + 32$, сначала 30 прибавляем к 47, а затем к полученной сумме прибавляем 2. После сложения 30 и 47 задача *упрощается*: $77 + 2$ равно 79. Проиллюстрируем это следующим образом:

$$\begin{array}{r} 47 + 32 \quad = \quad 77 + 2 \quad = \quad 79 \\ \text{(сначала прибавляем 30,} \quad \text{затем 2)} \end{array}$$

Приведенная схема — простой способ представления мыслительных процессов, выполняемых для получения правильного ответа. Хотя вы должны читать и понимать такие схемы на протяжении всего времени работы с книгой, записывать что-либо не требуется.

Теперь попробуем вычисление, в котором необходимо держать числа в уме:

$$\begin{array}{r} 67 \\ + 28 \quad (20 + 8) \end{array}$$

Прибавляя слева направо, вы можете свести задачу к действию $67 + 20 = 87$, а затем к сложению $87 + 8 = 95$.

$$\mathbf{67 + 28 = 87 + 8 = 95}$$

(сначала прибавляем 20, затем 8)

Теперь попробуйте сами, после чего сверьтесь с тем, как это сделали мы.

$$\mathbf{84}$$
$$\mathbf{+ 57 (50 + 7)}$$

Ну что, получилось? Вы сложили $84 + 50 = 134$, а затем $134 + 7 = 141$.

$$\mathbf{84 + 57 = 134 + 7 = 141}$$

(сначала прибавляем 50, затем 7)

Если удержание цифр в уме служит причиной ваших ошибок, не переживайте. Вероятно, это ваша первая попытка выполнить систематизированное устное вычисление и, как и большинству людей, вам понадобится время, чтобы запомнить числа. Однако с опытом вы сможете удерживать их в уме автоматически. В качестве практики попробуйте решить устно еще одну задачку, а затем опять сверьтесь с тем, как это сделали мы.

$$\mathbf{68}$$
$$\mathbf{+ 45 (40 + 5)}$$

Вам следовало сложить $68 + 40 = 108$ и $108 + 5 = 113$ (итоговый ответ). Было ли вам проще? Если хотите проверить свои силы на большем количестве задач на сложение двузначных чисел, обратитесь к примерам, представленным ниже. (Ответы и ход вычислений приведены в конце книги.)

УПРАЖНЕНИЕ: СЛОЖЕНИЕ ДВУЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

1. $\begin{array}{r} 23 \\ +16 \\ \hline \end{array}$ 2. $\begin{array}{r} 64 \\ +43 \\ \hline \end{array}$ 3. $\begin{array}{r} 95 \\ +32 \\ \hline \end{array}$ 4. $\begin{array}{r} 34 \\ +26 \\ \hline \end{array}$ 5. $\begin{array}{r} 89 \\ +78 \\ \hline \end{array}$

6. $\begin{array}{r} 73 \\ +58 \\ \hline \end{array}$ 7. $\begin{array}{r} 47 \\ +36 \\ \hline \end{array}$ 8. $\begin{array}{r} 19 \\ +17 \\ \hline \end{array}$ 9. $\begin{array}{r} 55 \\ +49 \\ \hline \end{array}$ 10. $\begin{array}{r} 39 \\ +38 \\ \hline \end{array}$

Сложение трехзначных чисел

Стратегия сложения трехзначных чисел точно такая же, как и двузначных: вы складываете слева направо и после каждого шага переходите к новой, более простой задаче на сложение. Попробуем:

$$\begin{array}{r} 538 \\ + 327 \quad (300 + 20 + 7) \\ \hline \end{array}$$

Вначале прибавляем к 538 число 300, затем 20, затем 7. После прибавления 300 ($538 + 300 = 838$) задача сводится к $838 + 27$. После прибавления 20 ($838 + 20 = 858$) задача упрощается до $858 + 7 = 865$. Такого рода мыслительный процесс может быть представлен в виде следующей схемы:

$$\begin{array}{r} 538 + 327 \\ + 300 \end{array} = \begin{array}{r} 838 + 27 \\ + 20 \end{array} = \begin{array}{r} 858 + 7 \\ + 7 \end{array} = 865$$

Все задачи на устное сложение можно решить таким способом, последовательно упрощая задачу до тех пор, пока не останется просто прибавить однозначное число. Обратите внимание, что пример $538 + 327$ требует удержания в уме шести цифр, тогда как $838 + 27$ и $858 + 7$ — только пяти и четырех цифр соответственно. *Если вы упрощаете задачу, решить ее становится легче!*

Попробуйте решить в уме следующую задачу на сложение, прежде чем посмотрите наше решение

$$\begin{array}{r} 623 \\ + 159 \\ \hline \end{array} (100 + 50 + 9)$$

Вы упростили ее, складывая цифры слева направо? После сложения сотен ($623 + 100 = 723$) осталось сложить десятки ($723 + 50 = 773$). Упростив задачу до $773 + 9$, в сумме получаем 782. В виде схемы решение задачи выглядит так:

$$\begin{array}{r} 623 + 159 \\ + 100 \end{array} = \begin{array}{r} 723 + 59 \\ + 50 \end{array} = \begin{array}{r} 773 + 9 \\ + 9 \end{array} = 782$$

Когда я решаю подобные задачи в уме, я не визуализирую числа, а пытаюсь *слышать* их. Я слышу пример $623 + 159$ как *шестьсот двадцать три плюс сто пятьдесят девять*. Выделяя для себя слово *сто*, я понимаю, с чего начать. Шесть плюс один равняется семи, значит, моя следующая задача *семьсот двадцать три плюс пятьдесят девять* и так далее. Решая такие задачи, тоже делайте это вслух. Подкрепление в виде звуков поможет вам освоить этот метод гораздо быстрее.

Задачи на сложение трехзначных чисел на самом деле не бывают сложнее следующей:

$$\begin{array}{r} 858 \\ + 634 \\ \hline \end{array}$$

Взгляните на то, как это делается:

$$\begin{array}{r} 858 + 634 \\ + 600 \end{array} = \begin{array}{r} 1458 + 34 \\ + 30 \end{array} = \begin{array}{r} 1488 + 4 \\ + 4 \end{array} = 1492$$

На каждом этапе я слышу (а не вижу) новую задачу на сложение. У меня в голове это звучит примерно так:

Небольшой обмен любезностями: устное сложение и вычитание

**858 плюс 634 равно 1458 плюс 34,
равно 1488 плюс 4, равно 1492.**

Ваш внутренний голос может звучать иначе, чем мой (не исключено, что вам удобнее видеть числа, а не слышать их), но, как бы там ни было, наша цель — «подкреплять» числа на их пути, чтобы не забыть, на каком этапе решения задачи мы находимся и не начинать все сначала.

Давайте еще попрактикуемся.

$$\begin{array}{r} 759 \\ + 496 \quad (400 + 90 + 6) \end{array}$$

Вначале сложите в уме, потом проверьте вычисления.

$$\begin{array}{r} 759 + 496 = 1159 + 96 = 1249 + 6 = 1255 \\ + 400 \qquad \qquad + 90 \qquad \qquad + 6 \end{array}$$

Этот пример немного сложнее предыдущего, так как требует держать в уме числа на протяжении всех трех шагов. Однако в нем можно воспользоваться альтернативным методом подсчета. Я уверен, что вы согласитесь: гораздо проще к 759 прибавить 500, чем 496. Так что попробуйте прибавить 500 и затем вычесть разность.

$$\begin{array}{r} 759 \\ + 496 \quad (500 - 4) \end{array}$$

$$759 + 496 = 1259 - 4 = 1255$$

(сначала прибавляем 500, затем вычитаем 4)

До сих пор вы последовательно расчленили второе число, чтобы сложить его с первым. На самом деле не имеет значения, какое число разбивать на части, важно соблюдать порядок действий. Тогда вашему мозгу не придется решать, в какую

сторону направиться. Если запомнить второе число намного легче первого, то их можно поменять местами, как в следующем примере.

$$\begin{array}{r} 207 \\ + 528 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 207 + 528 = 528 + 207 = 728 + 7 = 735 \\ \text{(меняем местами)} \quad + 200 \quad + 7 \end{array}$$

Закончим тему сложением трехзначных чисел с четырехзначными. Так как память среднестатистического человека одновременно может удерживать только семь или восемь цифр, это как раз подходящая задача, с которой вы можете справиться, не прибегая к искусственным устройствам запоминания (таким как пальцы, калькуляторы или приемы мнемотехники из главы 7). Во многих задачах на сложение одно или оба числа заканчиваются на 0, поэтому уделим внимание примерам такого типа. Начнем с самого легкого:

$$\begin{array}{r} 2700 \\ + 567 \\ \hline \end{array}$$

Так как *27 сотен* + *5 сотен* равняется *32 сотням*, мы просто прибавляем *67* с целью получить *32 сотни* и *67*, то есть *3267*. Процесс решения идентичен для следующих заданий.

$$\begin{array}{r} 3240 \\ + 18 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3240 \\ + 72 \\ \hline \end{array}$$

Поскольку $40 + 18 = 58$, первый ответ — *3258*. Во втором примере $40 + 72$ в сумме больше 100, поэтому ответ будет *33* сотни с «хвостиком». Итак, $40 + 72 = 112$, поэтому ответ — *3312*.

Небольшой обмен любезностями: устное сложение и вычитание

Эти задачи легкие, потому что значащие цифры (отличные от нуля) в них складываются лишь один раз и примеры можно решить в одно действие. Если значащие цифры складываются два раза, то и действий понадобится два. Например:

$$\begin{array}{r} 4560 \\ + 171 \quad (100 + 71) \end{array}$$

Задача в два действия схематически выглядит следующим образом.

$$\begin{array}{r} 4560 + 171 = 4660 + 71 = 4731 \\ \quad \quad \quad + 100 \quad \quad \quad + 71 \end{array}$$

Тренируйтесь на представленных ниже упражнениях в сложении трехзначных чисел до тех пор, пока не станете с легкостью выполнять их в уме, не подглядывая в ответ. (Ответы находятся в конце книги.)

УПРАЖНЕНИЕ: СЛОЖЕНИЕ ТРЕХЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

- | | | | | | | | | | |
|-----|---------------------|-----|---------------------|-----|---------------------|-----|---------------------|-----|---------------------|
| 1. | 242 | 2. | 312 | 3. | 635 | 4. | 457 | 5. | 912 |
| | <u>+137</u> | | <u>+ 256</u> | | <u>+ 814</u> | | <u>+ 241</u> | | <u>+ 475</u> |
| 6. | 852 | 7. | 457 | 8. | 878 | 9. | 276 | 10. | 877 |
| | <u>+ 378</u> | | <u>+ 269</u> | | <u>+ 797</u> | | <u>+ 689</u> | | <u>+ 539</u> |
| 11. | 5400 | 12. | 1800 | 13. | 6120 | 14. | 7830 | 15. | 4240 |
| | <u>+ 252</u> | | <u>+ 855</u> | | <u>+ 136</u> | | <u>+ 348</u> | | <u>+ 371</u> |

Карл Фридрих Гаусс: вундеркинд от математики

Вундеркинд — это очень талантливый ребенок. Обычно его называют «развитым не по годам» или «одаренным», так как он почти всегда опережает сверстников в развитии. Немецкий математик Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) был одним из таких детей. Он часто хвастался тем, что научился производить расчеты раньше, чем говорить. Будучи трех лет от роду, он исправил платежную ведомость отца, заявив: «Подсчеты неверны». Дальнейшая проверка ведомости показала, что малыш Карл был прав.

В десятилетнем возрасте ученик Гаусс получил на уроке следующую математическую задачу: какова сумма чисел от 1 до 100? Пока одноклассники отчаянно производили расчеты с бумагой и карандашом, Гаусс сразу представил себе, что если он запишет числа от 1 до 50 слева направо, а от 51 до 100 — справа налево прямо под списком чисел от 1 до 50, то каждая сумма чисел, стоящих друг под другом, будет равна 101 ($1 + 100, 2 + 99, 3 + 98...$). Поскольку выходило всего пятьдесят таких сумм, ответ составил $101 \times 50 = 5050$. Ко всеобщему изумлению (включая учителя), юный Карл получил ответ, не только опередив всех остальных учеников, но и вычислив его целиком в уме. Мальчик записал ответ на своей грифельной доске и швырнул ее на стол учителя с дерзкими словами: «Вот ответ». Учитель был настолько поражен, что за свои деньги купил наилучший из доступных учебников по арифметике и отдал его Гауссу, заявив: «Это превышает пределы моих возможностей, я больше ничему не смогу его научить».

Действительно, Гаусс стал учить математику других и в конечном итоге достиг небывалых высот, прославившись одним из величайших математиков в истории, чьи теории до сих пор служат науке. Его желание лучше понимать природу посредством языка математики было подытожено в его девизе, взятом из шекспировского «Короля Лира» (заменяя «закон» на «законы»): «Природа, ты моя богиня! В жизни я лишь твоим законам послушен».

ВЫЧИТАНИЕ СЛЕВА НАПРАВО

Для большинства из нас сложение проще вычитания. Но если вы будете вычитать слева направо и начнете разделять вычисления на более простые действия, вычитание может стать почти таким же простым, как сложение.

Вычитание двузначных чисел

При вычитании двузначных чисел следует упростить задачу, сведя ее к вычитанию (или сложению) однозначных. Начнем с очень простого примера.

$$\begin{array}{r} 86 \\ - 25 \quad (20 + 5) \end{array}$$

После каждого действия вы переходите на новый, более простой этап вычитания. Сначала отнимаем 20 ($86 - 20 = 66$), затем 5, имея простое действие $66 - 5$, в итоге получаем 61. Решение схематически можно представить как:

$$86 - 25 = 66 - 5 = 61$$

(сначала вычитаем 20, затем 5)

Конечно, вычитать значительно легче, если не нужно занимать единицу из старшего разряда (так происходит, когда большая цифра вычитается из меньшей). Однако хочу вас успокоить: трудные задачи на вычитание обычно можно превратить в легкие задачи на сложение. Например:

$$\begin{array}{r} 86 \\ - 29 \quad (20 + 9) \text{ или } (30 - 1) \end{array}$$

Существуют два способа решить этот пример в уме.

1. Сначала вычитаем 20, затем 9:

$$86 - 29 = 66 - 9 = 57$$

(сначала вычитаем 20, затем 9)

Но для этой задачи я предлагаю другую стратегию.

2. Сначала вычитаем 30, потом прибавляем 1

$$86 - 29 = 56 + 1 = 57$$

(сначала вычитаем 30, затем прибавляем 1)

Определить, какой метод лучше использовать, вам поможет правило:

*если в задаче на вычитание двузначных чисел
вычитаемая цифра больше уменьшаемой,
округлите ее до десяти.*

Далее из уменьшаемого числа вычтите округленное число, а потом прибавьте разность между округленным числом и первоначальным. Например, в задаче $54 - 28$ вычитаемое 8 больше уменьшаемого 4. Поэтому округляем 28 до 30, вычисляем $54 - 30 = 24$, после чего прибавляем 2 и получаем ответ — 26.

$$\begin{array}{r} 54 \\ - 28 \quad (30 - 2) \end{array}$$

$$54 - 28 = 24 + 2 = 26$$

- 30 + 2

А теперь закрепим знания на примере $81 - 37$. Так как 7 больше 1, округляем 37 до 40, вычитаем это число из 81 ($81 - 40 = 41$), а затем прибавляем разность 3 для получения ответа:

$$81 - 37 = 41 + 3 = 44$$

- 30 + 3

Всего лишь немного практики — и вы без труда сможете решать задачи обоими способами. Используйте вышеуказанное правило для принятия решения о том, какой способ лучше подходит.

Небольшой обмен любезностями: устное сложение и вычитание

УПРАЖНЕНИЕ: ВЫЧИТАНИЕ ДВУЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

$$\begin{array}{r} 1. \quad 38 \\ - 23 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 2. \quad 84 \\ - 59 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 3. \quad 92 \\ - 34 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 4. \quad 67 \\ - 48 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 5. \quad 79 \\ - 29 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6. \quad 63 \\ - 46 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 7. \quad 51 \\ - 27 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 8. \quad 89 \\ - 48 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 9. \quad 125 \\ - 79 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 10. \quad 148 \\ - 86 \\ \hline \end{array}$$

Вычитание трехзначных чисел

Теперь займемся вычитанием трехзначных чисел.

$$\begin{array}{r} 958 \\ - 417 \text{ (} 400 + 10 + 7 \text{)} \\ \hline \end{array}$$

Этот пример не требует округления чисел (каждая цифра второго числа как минимум на единицу меньше соответствующих цифр первого), поэтому задача не должна быть слишком сложной. Просто вычитайте по одной цифре за раз, с каждым шагом упрощая задачу.

$$\begin{array}{r} 958 - 417 \\ - 400 \end{array} = \begin{array}{r} 558 - 17 \\ - 10 \end{array} = \begin{array}{r} 748 - 7 \\ - 7 \end{array} = \begin{array}{r} 541 \end{array}$$

Теперь рассмотрим задачу на вычитание трехзначных чисел, которая требует округления.

$$\begin{array}{r} 747 \\ - 598 \text{ (} 600 - 2 \text{)} \\ \hline \end{array}$$

На первый взгляд она кажется довольно сложной. Но если сначала вычесть 600 ($747 - 600 = 147$), а потом прибавить 2, то получим 149 ($147 + 2 = 149$).

$$\begin{array}{r} 747 - 598 \\ - 600 \end{array} = \begin{array}{r} 147 + 2 \\ + 2 \end{array} = \begin{array}{r} 149 \end{array}$$

Теперь попробуйте сами.

$$\begin{array}{r} 853 \\ - 692 \\ \hline \end{array}$$

Вначале вы вычли 700 из 853? Если да, то получили $853 - 700 = 153$, не правда ли? Так как вы вычли число, на 8 большее исходного, прибавили ли вы 8, чтобы получить ответ 161?

$$\begin{array}{r} 853 - 692 \\ - 700 \end{array} = \begin{array}{r} 153 + 8 \\ + 8 \end{array} = 161$$

Теперь я могу признаться, что нам удалось упростить процесс вычитания, потому что вычитаемые числа были почти кратными 100. (Вы заметили?) А как насчет других задач, например такой?

$$\begin{array}{r} 725 \\ - 468 \\ \hline \end{array} \quad (400 + 60 + 8) \quad \text{или} \quad (500 - ?)$$

Если вычитать по одной цифре за раз, упрощая каждое действие, то последовательность будет выглядеть так:

$$\begin{array}{r} 725 - 468 \\ - 400 \end{array} = \begin{array}{r} 325 - 68 \\ - 60 \end{array} = \begin{array}{r} 265 - 8 \\ - 8 \end{array} = 257$$

А что произойдет, если округлить вычитаемое до 500?

$$725 - 468 = 225 + ? = ?$$

(сначала вычитаем 500, затем прибавляем ?)

Вычесть 500 легко: $725 - 500 = 225$. Но вы отняли слишком много. Хитрость в том, чтобы точно определить, чему равно это «слишком много».

На первый взгляд, ответ не очевиден. Чтобы найти разницу между 468 и 500. Ответ можно получить с помощью *дополнения* — ловкого приема, который упростит большинство задач на вычитание трехзначных чисел.

Вычисление дополнений

Быстро скажите, как далеко от 100 эти числа?

57 68 49 21 79

Вот ответы:

57	68	49	21	79
<u>+ 43</u>	<u>+ 32</u>	<u>+ 51</u>	<u>+ 79</u>	<u>+ 21</u>
100	100	100	100	100

Обратите внимание, что для каждой пары чисел, сумма которых равна 100, первые цифры (слева) в сумме дают 9, а последние (справа) — 10. Можно сказать, что 43 — это дополнение для 57, 32 — для 68 и так далее.

А сейчас отыщите дополнения к следующим двузначным числам:

37 59 93 44 08

Чтобы найти дополнение к числу 37, сначала определите, сколько нужно прибавить к 3, чтобы получить 9. (Ответ — 6.) Затем выясните, сколько следует добавить к 7 для получения 10. (Ответ — 3.) Следовательно, 63 — дополнение к 37.

Остальные дополнения: 41, 7, 56, 92 соответственно. Обратите внимание, что как математик вы ищете дополнения, как и все остальное, слева направо. Как мы уже выяснили, первую цифру увеличиваем до 9, вторую до 10. (Исключение, если числа заканчиваются на 0 — например, $30 + 70 = 100$, — но такие дополнения легко вычислить!)

Какая связь между дополнениями и устным вычитанием? Они позволяют преобразовать сложные примеры на вычитание в простые задачи на сложение. Рассмотрим последнюю задачу, доставившую нам некоторые трудности.

$$\begin{array}{r} 725 \\ - 468 \quad (500 - 32) \end{array}$$

Итак, сначала вычитаем из 725 число 500 вместо 468 и получаем 225 ($725 - 500 = 225$). Однако поскольку мы вычли слишком много, нужно выяснить, сколько теперь следует прибавить. Использование дополнений позволяет мгновенно дать ответ. На сколько цифр 468 отстоит от 500? На столько же, насколько 68 отстоит от 100. Если искать дополнение для 68 показанным выше способом, то выйдет 32. Прибавьте 32 к 225 и получите 257.

$$725 - 468 = 225 + 32 = 257$$

(сначала вычитаем 500, затем прибавляем 32)

Попробуйте другую задачу на вычитание трехзначных чисел:

$$\begin{array}{r} 821 \\ - 259 \quad (300 - 41) \end{array}$$

Чтобы подсчитать это в уме, отнимите 300 от 821, выйдет 521. Затем прибавьте дополнение для 59 (то есть 41), получится 562. Весь процесс выглядит следующим образом:

$$821 - 259 = 521 + 41 = 562$$

(сначала вычитаем 300, затем прибавляем 41)

Вот еще один пример:

$$\begin{array}{r} 645 \\ - 372 \quad (400 - 28) \end{array}$$

Проверьте свой ответ и ход решения:

$$\begin{array}{r} 645 - 372 = 245 + 28 = 265 + 8 = 273 \\ - 400 \qquad \qquad + 20 \qquad \qquad + 8 \end{array}$$

Вычитание трехзначного числа из четырехзначного не многим сложнее, что иллюстрирует следующий пример.

Небольшой обмен любезностями: устное сложение и вычитание

$$\begin{array}{r} 1246 \\ - 579 \text{ (} 600 - 21 \text{)} \\ \hline \end{array}$$

Путем округления вычитаем 600 из 1246. Получаем 646. Затем прибавляем дополнение для 79 (то есть 21). Ответ: $646 + 21 = 667$.

$$1246 - 579 = 646 + 21 = 667$$

(сначала вычитаем 600, затем прибавляем 21)

Выполните упражнения на вычитание трехзначных чисел, данные ниже, а затем попробуйте придумать свои примеры на сложение (или на вычитание?).

УПРАЖНЕНИЕ: ВЫЧИТАНИЕ ТРЕХЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

- | | | | | | | | | | |
|-----|---|-----|---|-----|--|-----|--|-----|--|
| 1. | $\begin{array}{r} 583 \\ -271 \\ \hline \end{array}$ | 2. | $\begin{array}{r} 936 \\ - 725 \\ \hline \end{array}$ | 3. | $\begin{array}{r} 587 \\ - 298 \\ \hline \end{array}$ | 4. | $\begin{array}{r} 763 \\ - 486 \\ \hline \end{array}$ | 5. | $\begin{array}{r} 204 \\ - 185 \\ \hline \end{array}$ |
| 6. | $\begin{array}{r} 793 \\ - 402 \\ \hline \end{array}$ | 7. | $\begin{array}{r} 219 \\ - 176 \\ \hline \end{array}$ | 8. | $\begin{array}{r} 978 \\ - 784 \\ \hline \end{array}$ | 9. | $\begin{array}{r} 455 \\ - 319 \\ \hline \end{array}$ | 10. | $\begin{array}{r} 772 \\ - 596 \\ \hline \end{array}$ |
| 11. | $\begin{array}{r} 873 \\ - 357 \\ \hline \end{array}$ | 12. | $\begin{array}{r} 564 \\ - 228 \\ \hline \end{array}$ | 13. | $\begin{array}{r} 1428 \\ - 571 \\ \hline \end{array}$ | 14. | $\begin{array}{r} 2345 \\ - 678 \\ \hline \end{array}$ | 15. | $\begin{array}{r} 1776 \\ - 987 \\ \hline \end{array}$ |

Глава 2

Произведения растроченной юности: основы умножения

Вероятно, я слишком много времени в детстве думал о том, как максимально быстро перемножать числа в уме. Мне поставили диагноз «гиперактивность», а моим родителям сообщили, что из-за короткого периода концентрации внимания мне, скорее всего, не добиться успеха в учебе. (К счастью, родители этот прогноз проигнорировали; и с учителями мне повезло в первые годы обучения.) Должно быть, этот короткий период концентрации внимания мотивировал меня к поиску ускоренных способов счета. Не думаю, что тогда я обладал достаточным терпением для решения задач с карандашом и бумагой. И вы, как только освоите техники, описанные в данной главе, тоже перестанете полагаться на эти инструменты.

В этой главе вы научитесь умножать в уме однозначные числа на дву- и трехзначные. Кроме того, изучите феноменально быстрый способ возводить в квадрат двузначные числа. Даже друзья с калькуляторами не смогут угнаться за вами. Поверьте, практически каждый будет ошеломлен тем, что такие задачи можно решить в уме, да еще и с подобной скоростью. Иногда я думаю, почему мы не применяли эти способы в школе, ведь они кажутся такими простыми, как только их освоишь.

Но для того чтобы развить этот навык, нужно соблюсти одно обязательное условие: вам необходимо знать таблицу умножения, вплоть до десяти. В действительности вы должны быть способны воспроизвести ее в обоих направлениях. Те из вас, кому понадобится освежить знания, могут обратиться к таблице умножения, представленной ниже. Как только вы «проглотите» ее, можете начинать осваивать мои методы.

Таблица умножения от 1 до 10

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

ЗАДАЧИ НА УМНОЖЕНИЕ ТИПА «2 НА 1»

Если вы успешно поработали над главой 1, то наверняка оценили преимущества сложения и вычитания слева направо. В этой главе мы тоже будем действовать аналогичным образом, но уже в отношении умножения. Несомненно, это полностью противоположно тому, чему вас учили в школе. Но вскоре вы поймете, насколько легче думать слева направо, нежели справа налево. (Кстати, вы можете проговаривать числа вслух, пока не закончите вычисления.)

Рассмотрим первый пример.

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times 7 \\ \hline \end{array}$$

Сначала умножаем $40 \times 7 = 280$. (Заметьте, что 40×7 — это почти то же самое, что и 4×7 , только с добавлением дружелюбного нуля.) Затем $2 \times 7 = 14$. Теперь складываем 280 плюс 14 (слева направо, естественно) и получаем ответ 294. Проиллюстрируем это в записи:

$$\begin{array}{r} 42 (40 + 2) \\ \times 7 \\ 40 \times 7 = 280 \\ 2 \times 7 = + 14 \\ \hline 294 \end{array}$$

Мы опустили на приведенной схеме устное сложение $280 + 14$, так как вы уже научились делать подобные вычисления в предыдущей главе. Поначалу вам придется подсматривать условия задачи во время решения. С практикой вы сможете отказаться от этого шага и считать исключительно в уме.

Попробуем другой пример.

$$\begin{array}{r} 48 (40 + 8) \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$$

Ваш первый шаг — разбить пример на маленькие задачки на умножение, которые можно с легкостью выполнить в уме. Так как $48 = 40 + 8$, умножаем $40 \times 4 = 160$, затем прибавляем $8 \times 4 = 32$. Ответ будет 192. (Примечание: если вас интересует, *почему* этот прием работает, обратитесь к разделу «Почему эти приемы работают» в конце данной главы.)

$$\begin{array}{r} 48 (40 + 8) \\ \times 4 \\ \hline 40 \times 4 = 160 \\ 8 \times 4 = + 32 \\ \hline 192 \end{array}$$

Вот еще две задачи для устного умножения, которые решаются достаточно быстро. Сначала вычислите 62×3 . Затем 71×9 . Попробуйте выполнить все в уме, прежде чем посмотрите, как это сделали мы.

$$\begin{array}{r} 62 (60 + 2) \\ \times 3 \\ \hline 60 \times 3 = 180 \\ 2 \times 3 = + 6 \\ \hline 186 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 71 (70 + 1) \\ \times 9 \\ \hline 70 \times 9 = 630 \\ 1 \times 9 = + 9 \\ \hline 639 \end{array}$$

Эти два примера достаточно просты, потому что сумма складываемых чисел меньше 10. Выполняя действие $180 + 6$, вы можете *слышать* ответ: *сто восемьдесят... шесть!* Есть еще один простой способ устного умножения, при условии что двузначное число начинается на пять. Когда пять умножается на четную цифру, первое число получается кратным 100, что делает итоговую задачу на сложение особенно простой.

$$\begin{array}{r}
 58 (50 + 8) \\
 \times 4 \\
 \hline
 50 \times 4 = 200 \\
 8 \times 4 = + 32 \\
 \hline
 232
 \end{array}$$

Попрактикуйтесь на следующем примере.

$$\begin{array}{r}
 87 (80 + 7) \\
 \times 5 \\
 \hline
 80 \times 5 = 400 \\
 7 \times 5 = + 35 \\
 \hline
 435
 \end{array}$$

Обратите внимание, насколько легче решать его слева направо. Требуется намного меньше времени, чтобы сложить 400 плюс 35 в уме, чем понадобилось бы для применения метода «карандаш и бумага» и «5 пишем, 3 в уме».

Следующие два примера немного сложнее.

38 (30 + 8)	67 (60 + 7)
$\times 9$	$\times 8$
30 × 9 = 270	60 × 8 = 480
8 × 9 = + 72	7 × 8 = + 56
342	536

Как обычно, разбиваем задачу на подзадачи. В первом примере умножаем 30×9 и 8×9 , в итоге суммируем $270 + 72$. Задача на сложение немного сложнее, потому что включает в себя запоминание чисел. Вот как это делается: $270 + 70 + 2 = 340 + 2 = 342$.

Практикуясь, вы станете легко решать задачи, подобные этой. И те из них, которые требуют запоминания чисел, покажутся почти такими же легкими, как и не требующие этого.

Округление

В предыдущей главе вы убедились, насколько полезно округление при выполнении вычитания. Та же история и с умножением, особенно для чисел, заканчивающихся на 8 или 9.

Рассмотрим пример 69×6 , показанный ниже. Слева представлено вычисление обычным способом: складываем $360 + 54$. Справа мы округлили 69 до 70 и вычли из $420 - 6$, что нам показалось более простым действием.

69 (60 + 9) или	69 (70 - 1)
$\begin{array}{r} \times 6 \\ 60 \times 6 = 360 \\ 9 \times 6 = + 54 \\ \hline 414 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times 6 \\ 70 \times 6 = 420 \\ -1 \times 6 = - 6 \\ \hline 414 \end{array}$

Следующий пример также демонстрирует, насколько округление облегчает вычисления.

78 (70 + 8) или	78 (80 - 2)
$\begin{array}{r} \times 9 \\ 70 \times 9 = 630 \\ 8 \times 9 = + 72 \\ \hline 702 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times 9 \\ 80 \times 9 = 720 \\ -2 \times 9 = - 18 \\ \hline 702 \end{array}$

Метод вычитания особенно хорошо работает для чисел, в которых надо округлять до кратной 10 одну или две цифры. Однако он не так хорош, когда округлять приходится больше двух цифр, потому что тогда сама задача на вычитание усложняется. В этом случае можно продолжать придерживаться метода сложения. Лично я для таких задач использую только его, потому что за время, потраченное на выбор метода, уже могу все посчитать!

Если вы хотите усовершенствовать технику, то следует больше практиковаться на задачах типа «2 на 1». Ниже представлены 20 примеров, на которых вы можете потренироваться. Ответы даны в конце книги, включая разбивку на отдельные действия для всего процесса умножения. Если после разбора каждого примера вы захотите попрактиковаться еще, то просто составьте собственные примеры. Считайте в уме, затем сверяйте ответ с калькулятором. Как только почувствуете, что научились быстро выполнять такие задачки в уме, можете переходить на следующий уровень устных вычислений.

УПРАЖНЕНИЕ: УМНОЖЕНИЕ ТИПА «2 НА 1»

- | | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. $\begin{array}{r} 82 \\ \times 9 \\ \hline \end{array}$ | 2. $\begin{array}{r} 43 \\ \times 7 \\ \hline \end{array}$ | 3. $\begin{array}{r} 67 \\ \times 5 \\ \hline \end{array}$ | 4. $\begin{array}{r} 71 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$ | 5. $\begin{array}{r} 93 \\ \times 8 \\ \hline \end{array}$ |
| 6. $\begin{array}{r} 49 \\ \times 9 \\ \hline \end{array}$ | 7. $\begin{array}{r} 28 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$ | 8. $\begin{array}{r} 53 \\ \times 5 \\ \hline \end{array}$ | 9. $\begin{array}{r} 84 \\ \times 5 \\ \hline \end{array}$ | 10. $\begin{array}{r} 58 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$ |
| 11. $\begin{array}{r} 97 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$ | 12. $\begin{array}{r} 78 \\ \times 2 \\ \hline \end{array}$ | 13. $\begin{array}{r} 96 \\ \times 9 \\ \hline \end{array}$ | 14. $\begin{array}{r} 75 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$ | 15. $\begin{array}{r} 57 \\ \times 7 \\ \hline \end{array}$ |
| 16. $\begin{array}{r} 37 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$ | 17. $\begin{array}{r} 46 \\ \times 2 \\ \hline \end{array}$ | 18. $\begin{array}{r} 76 \\ \times 8 \\ \hline \end{array}$ | 19. $\begin{array}{r} 29 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$ | 20. $\begin{array}{r} 64 \\ \times 8 \\ \hline \end{array}$ |

ЗАДАЧИ НА УМНОЖЕНИЕ ТИПА «3 НА 1»

Теперь, когда вы умеете в уме решать задачи типа «2 на 1», умножение трехзначных чисел на однозначные не покажется вам более сложным. Вы можете начать со следующего примера типа «3 на 1» (который на самом деле представляет собой замаскированную задачку типа «2 на 1»).

$$\begin{array}{r} 320 \quad (300 + 20) \\ \times \quad 7 \\ \hline 300 \times 7 = 2100 \\ 20 \times 7 = + 140 \\ \hline 2240 \end{array}$$

Было ли это легко? (Если этот пример показался трудным, вам следует повторить материал положению из главы 1.) Попробуем решить еще одну задачу «3 на 1», подобную верхней, но заменим в ней 0 на 6, чтобы у вас появилось еще одно действие для выполнения:

$$\begin{array}{r} 326 \quad (300 + 20 + 6) \\ \times \quad 7 \\ \hline 300 \times 7 = 2100 \\ 20 \times 7 = + 140 \\ \hline 2240 \\ 6 \times 7 = + 42 \\ \hline 2282 \end{array}$$

В данном случае вы просто прибавляете результат умножения 6×7 , то есть 42, к первой сумме 2240. Так как здесь не нужно запоминать никаких чисел, будет легко сложить 42 и 2240 и получить в итоге 2282.

При решении этой и других задач типа «3 на 1» камнем преткновения может стать удержание в памяти первой суммы (в этом примере число 2240), в то время как вы заняты умножением (здесь 6×7). Нет какого-либо магического секрета для запоминания первого числа, но я уверяю вас, что по мере освоения метода концентрация внимания улучшится, и держать числа в памяти, выполняя параллельно другие операции, станет для вас привычным делом.

Решим еще одну задачу.

$$\begin{array}{r}
 \mathbf{647 (600 + 40 + 7)} \\
 \times \quad \mathbf{4} \\
 \hline
 \mathbf{600 \times 4 = 2400} \\
 \mathbf{40 \times 4 = + 160} \\
 \hline
 \mathbf{2560} \\
 \mathbf{7 \times 4 = + 28} \\
 \hline
 \mathbf{2588}
 \end{array}$$

Даже если числа большие, сам процесс умножения прост. Например:

$$\begin{array}{r}
 \mathbf{987 (900 + 80 + 7)} \\
 \times \quad \mathbf{9} \\
 \hline
 \mathbf{900 \times 9 = 8100} \\
 \mathbf{80 \times 9 = + 720} \\
 \hline
 \mathbf{8820} \\
 \mathbf{7 \times 9 = + 63} \\
 \hline
 \mathbf{8883}
 \end{array}$$

Впервые решая такие задачки, вы должны поглядывать на записи, чтобы напоминать себе начальные условия. Поначалу это нормально. Но со временем попытайтесь избавиться от такой привычки, чтобы научиться держать в памяти всю задачу.

В разделе об умножении типа «2 на 1» мы видели, что примеры, где числа начинаются на пятерку, особенно легкие в решении. То же верно и для задач типа «3 на 1».

$$\begin{array}{r}
 \mathbf{563 (500 + 60 + 3)} \\
 \times \quad \mathbf{6} \\
 \hline
 \mathbf{500 \times 6 = 3000} \\
 \mathbf{60 \times 6 = 360} \\
 \mathbf{3 \times 6 = + 18} \\
 \hline
 \mathbf{3378}
 \end{array}$$

Обратите внимание, что всякий раз, когда первый результат умножения получается кратным 1000, следующее действие на сложение уже вовсе не является задачей. Так происходит потому, что вам не нужно запоминать никаких чисел и в дальнейшем порядковый номер тысячи не изменится. Если бы вы решали эту задачу перед кем-то, то могли бы сказать вслух «три тысячи...» с абсолютной уверенностью в том, что это число не превратится в ответе в 4 тысячи. (И в придачу, называя первые цифры, вы создаете иллюзию, будто мгновенно вычислили ответ!) Но даже если вы тренируетесь в одиночестве, проговаривание вслух первых результатов вычисления освобождает часть оперативной памяти, необходимой для продолжения работы над оставшимися действиями для решения задачи типа «2 на 1», ответ на которую вы тоже можете произнести вслух, например, «...триста семьдесят восемь».

Попробуйте данный подход при решении следующей задачи, где множителем выступает 5.

$$\begin{array}{r} \mathbf{663 (600 + 60 + 3)} \\ \times \quad \mathbf{5} \\ \hline \mathbf{600 \times 5 = 3000} \\ \mathbf{60 \times 5 = 300} \\ \mathbf{3 \times 5 = + 15} \\ \hline \mathbf{3315} \end{array}$$

Так как первые две цифры трехзначного числа одинаковые, вы можете произносить ответ параллельно с вычислениями даже без необходимости складывать что-либо! Правда, было бы здорово, если бы все задачки на умножение были такими легкими?

Поднимемся на новый уровень сложности и попробуем решить пару примеров, которые потребуют от нас удержания чисел в уме.

Магия чисел

$$\begin{array}{r} 184 (100 + 80 + 4) \\ \times \quad 7 \\ \hline 100 \times 7 = 700 \\ 80 \times 7 = + 560 \\ \hline 1260 \\ 4 \times 7 = + 28 \\ \hline 1288 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 684 (600 + 80 + 4) \\ \times \quad 9 \\ \hline 600 \times 9 = 5400 \\ 80 \times 9 = + 720 \\ \hline 6120 \\ 4 \times 9 = + 36 \\ \hline 6156 \end{array}$$

В следующих двух примерах вам нужно держать числа в уме на последнем этапе решения, а не в его начале.

$$\begin{array}{r} 648 (600 + 40 + 8) \\ \times \quad 9 \\ \hline 600 \times 9 = 5400 \\ 40 \times 9 = + 360 \\ \hline 5760 \\ 8 \times 9 = + 72 \\ \hline 5832 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 376 (300 + 70 + 6) \\ \times \quad 4 \\ \hline 300 \times 4 = 1200 \\ 70 \times 4 = + 280 \\ \hline 1480 \\ 6 \times 4 = + 24 \\ \hline 1504 \end{array}$$

Первое действие для каждой задачи легко выполнить в уме. Сложности возникают при необходимости удерживать в памяти предварительный ответ, параллельно вычисляя итоговый. В первой задаче легко сложить $5400 + 360 = 5760$. Но вы будете вынуждены твердить «5760» самому себе, пока умножаете $8 \times 9 = 72$. Затем надо сложить 5760 и 72. Иногда на этой стадии я начинаю проговаривать ответ вслух еще до ее завершения. Я знаю, что нужно будет держать числа в уме, когда я буду складывать $60 + 72$, но я также знаю, что 5700 станет 5800. Я говорю: «Пять тысяч восемьсот...», затем приостанавливаюсь для сложения $60 + 72 = 132$. Поскольку я уже держу числа в уме, я произношу только последние две цифры: «... тридцать два!» А вот и ответ: 5832.

Две следующие задачи потребуют от вас держать в уме два числа, так что их решение может занять больше времени. Но, потренировавшись, вы станете делать это быстрее.

489 (400 + 80 + 9)

$$\begin{array}{r}
 \times \quad \underline{7} \\
 400 \times 7 = \quad \underline{2800} \\
 80 \times 7 = \quad \underline{+ 560} \\
 \quad \quad \quad \underline{3360} \\
 9 \times 7 = \quad \underline{+ 63} \\
 \quad \quad \quad \underline{3423}
 \end{array}$$

224 (200 + 20 + 4)

$$\begin{array}{r}
 \times \quad \underline{9} \\
 200 \times 9 = \quad \underline{1800} \\
 20 \times 9 = \quad \underline{+ 180} \\
 \quad \quad \quad \underline{1980} \\
 4 \times 9 = \quad \underline{+ 36} \\
 \quad \quad \quad \underline{2016}
 \end{array}$$

Когда вы впервые принимаетесь за решение таких примеров, повторяйте ответы для каждого действия вслух, параллельно вычисляя остальное. В первой задаче, например, начните с «две тысячи восемьсот плюс пятьсот шестьдесят», проговорив пару раз все это вслух и тем самым закрепив два числа в памяти, пока складываете их. Повторите ответ «три тысячи триста шестьдесят» несколько раз, пока умножаете $9 \times 7 = 63$. После проговаривайте «три тысячи триста шестьдесят плюс шестьдесят три» вслух до тех пор, пока не вычислите итоговый ответ 3423. Если вы достаточно быстро соображаете, чтобы распознать, что сложение $60 + 63$ потребует переноса 1 в старший разряд, то вы в состоянии назвать итоговый ответ на долю секунды быстрее, чем сами это осознаете: «три тысячи четыреста и... двадцать три!»

Завершим раздел с задачами на умножение типа «3 на 1» рядом особых примеров, которые можно мгновенно решить, так как они требуют лишь одного действия на сложение вместо двух.

$$\begin{array}{r}
 \mathbf{511 (500 + 11)} \\
 \times \quad \mathbf{7} \\
 \hline
 \mathbf{500 \times 7 = 3500} \\
 \mathbf{11 \times 7 = + 77} \\
 \hline
 \mathbf{3577}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \mathbf{925 (900 + 25)} \\
 \times \quad \mathbf{8} \\
 \hline
 \mathbf{900 \times 8 = 7200} \\
 \mathbf{25 \times 8 = + 200} \\
 \hline
 \mathbf{7400}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 825 (800 + 25) \\ \times 3 \\ \hline 800 \times 3 = 2400 \\ 25 \times 3 = + 75 \\ \hline 2475 \end{array}$$

В общем, если результат умножения последних двух цифр первого числа на его множитель известен вам и без подсчетов (например, вы знаете, что $25 \times 8 = 200$), то вы сможете получить итоговый ответ намного быстрее. Например, если вы и так знаете, что $75 \times 4 = 300$, то легко вычислите 975×4 .

$$\begin{array}{r} 975 (900 + 75) \\ \times 4 \\ \hline 900 \times 4 = 3600 \\ 75 \times 4 = + 300 \\ \hline 3900 \end{array}$$

Чтобы закрепить только что усвоенный материал, решите следующие задачи на умножение типа «3 на 1» в уме, а затем проверьте себя по ответам в конце книги. Исходя из собственного опыта, могу сказать, что устные вычисления сродни катанию на велосипеде или печатанию. Это может казаться невозможным поначалу, но как только вы все освоите, то уже никогда этого не забудете.

УПРАЖНЕНИЕ: УМНОЖЕНИЕ ТИПА «3 НА 1»

- | | | | | |
|---|---|---|---|--|
| 1. $\begin{array}{r} 431 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$ | 2. $\begin{array}{r} 637 \\ \times 5 \\ \hline \end{array}$ | 3. $\begin{array}{r} 862 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$ | 4. $\begin{array}{r} 957 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$ | 5. $\begin{array}{r} 927 \\ \times 7 \\ \hline \end{array}$ |
| 6. $\begin{array}{r} 728 \\ \times 2 \\ \hline \end{array}$ | 7. $\begin{array}{r} 328 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$ | 8. $\begin{array}{r} 529 \\ \times 9 \\ \hline \end{array}$ | 9. $\begin{array}{r} 807 \\ \times 9 \\ \hline \end{array}$ | 10. $\begin{array}{r} 587 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$ |

$$11. \quad \begin{array}{r} 184 \\ \times 7 \\ \hline \end{array} \quad 12. \quad \begin{array}{r} 214 \\ \times 8 \\ \hline \end{array} \quad 13. \quad \begin{array}{r} 757 \\ \times 8 \\ \hline \end{array} \quad 14. \quad \begin{array}{r} 259 \\ \times 7 \\ \hline \end{array} \quad 15. \quad \begin{array}{r} 297 \\ \times 8 \\ \hline \end{array}$$

$$16. \quad \begin{array}{r} 751 \\ \times 7 \\ \hline \end{array} \quad 17. \quad \begin{array}{r} 457 \\ \times 7 \\ \hline \end{array} \quad 18. \quad \begin{array}{r} 339 \\ \times 8 \\ \hline \end{array} \quad 19. \quad \begin{array}{r} 134 \\ \times 8 \\ \hline \end{array} \quad 20. \quad \begin{array}{r} 611 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$$

$$21. \quad \begin{array}{r} 578 \\ \times 9 \\ \hline \end{array} \quad 22. \quad \begin{array}{r} 247 \\ \times 5 \\ \hline \end{array} \quad 23. \quad \begin{array}{r} 188 \\ \times 6 \\ \hline \end{array} \quad 24. \quad \begin{array}{r} 968 \\ \times 6 \\ \hline \end{array} \quad 25. \quad \begin{array}{r} 499 \\ \times 9 \\ \hline \end{array}$$

$$26. \quad \begin{array}{r} 670 \\ \times 4 \\ \hline \end{array} \quad 27. \quad \begin{array}{r} 429 \\ \times 3 \\ \hline \end{array} \quad 28. \quad \begin{array}{r} 862 \\ \times 5 \\ \hline \end{array} \quad 29. \quad \begin{array}{r} 285 \\ \times 6 \\ \hline \end{array} \quad 30. \quad \begin{array}{r} 488 \\ \times 9 \\ \hline \end{array}$$

$$31. \quad \begin{array}{r} 693 \\ \times 6 \\ \hline \end{array} \quad 32. \quad \begin{array}{r} 722 \\ \times 9 \\ \hline \end{array} \quad 33. \quad \begin{array}{r} 457 \\ \times 9 \\ \hline \end{array} \quad 34. \quad \begin{array}{r} 767 \\ \times 3 \\ \hline \end{array} \quad 35. \quad \begin{array}{r} 312 \\ \times 9 \\ \hline \end{array}$$

$$36. \quad \begin{array}{r} 691 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$$

ВОЗВЕДЕНИЕ В КВАДРАТ ДВУЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

Возводить в уме числа в квадрат (умножать число само на себя) — одно из наиболее легких, но в то же время и наиболее впечатляющих ловкачеств из арсенала устных вычислений. Я до сих пор помню, как открыл этот прием для себя. Мне было тринадцать. Я ехал в автобусе навестить отца на работе в центр Кливленда. Я уже проделывал этот путь неоднократно, поэтому мысли начали блуждать. Не помню почему, но я стал думать о числах, которые в сумме дают 20. И задался вопросом: насколько большим может быть произведение этих чисел?

Я начал с середины, 10×10 (или 10^2) равняется 100. Затем я умножил $9 \times 11 = 99$; $8 \times 12 = 96$; $7 \times 13 = 91$; $6 \times 14 = 84$;

$5 \times 15 = 75$; $4 \times 16 = 64$ и т. д. и обратил внимание на то, что результат каждый раз уменьшается. И разность между ним и 100 составляет 1, 4, 9, 16, 25, 36... или $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2...$ (смотри таблицу ниже).

	Числа, дающие в сумме 20	Их разность с числом 10	Их произведение	Разность произведений с числом 100
	10	0	100	0
	9	1	99	1
	8	2	96	4
	7	3	91	9
	6	4	84	16
	5	5	75	25
	4	6	64	36
	3	7	51	49
	2	8	36	64
	1	9	19	81

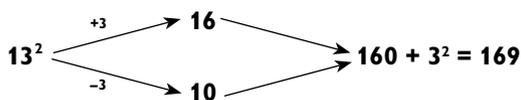
Мое открытие показалось мне удивительным. Затем я опробовал числа, дающие в сумме 26, и получил похожие результаты. Первым делом я вычислил $13^2 = 169$, затем $12 \times 14 = 168$; $11 \times 15 = 165$; $10 \times 16 = 160$; $9 \times 17 = 153$ и т. д. Как и прежде, разность этих произведений и числа 169 равнялась $1^2, 2^2, 3^2, 4^2...$ (смотрите таблицу ниже).

На самом деле существует простое алгебраическое объяснение данного феномена (смотрите раздел «Почему эти приемы работают» в конце главы). Но в то время я не разбирался в алгебре настолько хорошо, чтобы доказать постоянство появления такой последовательности, но все-таки провел достаточное количество экспериментов с подобными примерами, чтобы убедиться в ее наличии.

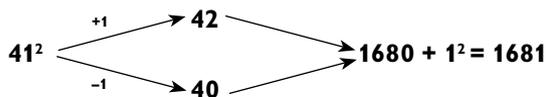
Числа, дающие в сумме 26		Их разность с числом 13	Их произведение	Разность произведений с числом 169
13	13	0	169	0
12	14	1	168	1
11	15	2	165	4
10	16	3	160	9
9	17	4	153	16
8	18	5	144	25

Затем я осознал, что данная последовательность может облегчить операцию возведения чисел в квадрат. Предположим, я хочу возвести в квадрат число 13. Почему бы, вместо того чтобы умножать 13×13 , не получить приближенный ответ, используя два числа, которые легче перемножить и которые в сумме дают тоже 26? Я выбрал $10 \times 16 = 160$. Чтобы получить итоговый ответ, я просто прибавил $3^2 = 9$ (так как 10 и 16 дают разность 3 с числом 13) к числу 160. Таким образом, $13^2 = 160 + 9 = 169$. Все четко!

Данный метод схематически можно представить так.



А теперь посмотрим, как эта схема работает с квадратом другого числа



Чтобы возвести в квадрат 41, вычтем 1 из 41, чтобы получить 40, и добавим 1 к 41, чтобы получить 42. Далее умножаем

40×42 . Без паники! Это простое умножение типа «2 на 1» под прикрытием (здесь 4×42). Так как $4 \times 42 = 168$, то $40 \times 42 = 1680$. Почти все! Вам осталось лишь прибавить квадрат 1 (числа, на величину которого вы уменьшали и увеличивали 41), чтобы получить ответ: $1680 + 1 = 1681$.

Неужели в самом деле так легко возводить в квадрат двузначные числа? Да, с использованием этого метода и небольшим количеством практики. И способ работает независимо от того, округляете вы исходное число в большую или меньшую сторону.

Например, возведем 77^2 , увеличив и уменьшив его во время решения.

$$77^2 \begin{cases} \xrightarrow{+7} 84 \\ \xrightarrow{-7} 70 \end{cases} \rightarrow 5880 + 7^2 = 5929$$

или

$$77^2 \begin{cases} \xrightarrow{+3} 80 \\ \xrightarrow{-3} 74 \end{cases} \rightarrow 5920 + 3^2 = 5929$$

В данном примере преимущество округления в большую сторону состоит в том, что вы практически уже получили решение, осталось просто прибавить 9 к 0 на конце!

По сути, я всегда округляю по принципу большей близости к 10. Так, если возводимое в квадрат число оканчивается на 6, 7, 8 или 9, то округляю в большую сторону, а если на 1, 2, 3 или 4, то в меньшую. (Если число оканчивается на 5, то округляем сразу в обе стороны!) Придерживаясь такой стратегии, вы ограничитесь прибавлением лишь чисел 1, 4, 9, 16 или 25 к результатам первого умножения.

Рассмотрим другой пример. Вычислите 56^2 в уме самостоятельно, прежде чем посмотрите на наше решение.

$$\begin{array}{ccc}
 & +4 & \rightarrow 60 \\
 56^2 & \swarrow & \searrow \\
 & -4 & \rightarrow 52 \\
 & & \rightarrow 3120 + 4^2 = 3136
 \end{array}$$

Возведение в квадрат чисел, оканчивающихся на 5, еще легче. Так как здесь выполняется округление в любую из сторон на величину 5, то числа, которые нужно перемножить, будут кратны 10. Следовательно, умножение и сложение покажутся особенно простыми. Ниже представлены решения для 85^2 и 35^2 .

$$\begin{array}{ccc}
 & +5 & \rightarrow 90 \\
 85^2 & \swarrow & \searrow \\
 & -5 & \rightarrow 80 \\
 & & \rightarrow 7200 + 5^2 = 7225
 \end{array}$$

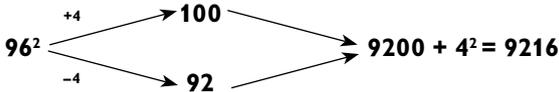
$$\begin{array}{ccc}
 & +5 & \rightarrow 40 \\
 35^2 & \swarrow & \searrow \\
 & -5 & \rightarrow 30 \\
 & & \rightarrow 1200 + 5^2 = 1225
 \end{array}$$

Как говорится в главе 0, когда в квадрат возводятся числа, оканчивающиеся на 5, округление в большую и меньшую стороны позволит немедленно сказать первую часть ответа, а потом дополнить его числом 25. Например, когда вы хотите посчитать 75^2 , округление до 80 и 70 даст вам «пять тысяч шестьсот... двадцать пять!».

Что касается чисел, оканчивающихся на 5, вам будет несложно разгромить любого «вычислителя» с калькулятором в руке. А после небольшой практики с другими задачками на возведение в квадрат момент, когда вы сможете победить

калькулятор, не заставит себя долго ждать. Вы даже перестанете бояться больших чисел. Можете попросить кого-нибудь задать вам действительно большое двузначное число, что-нибудь вроде «больше 90», и это будет выглядеть в глазах людей так, словно вы взялись за непосильную задачу. На самом же деле так даже проще, потому что у вас будет возможность округлить до 100.

Представим, что ваша аудитория назвала 96^2 . Сначала попробуйте сами, а потом сравните с нашим решением.



Правда, было легко? Вам следовало округлить с помощью 4 до 100 и 92, а затем умножить 100×92 и получить 9200. В момент решения задачи вы можете проговаривать вслух: «Девять тысяч двести...» и затем закончить: «...шестнадцать». И наслаждаться аплодисментами.

УПРАЖНЕНИЕ:
ВОЗВЕДЕНИЕ В КВАДРАТ ДВУЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

Решите следующие задачи.

- | | | | | |
|------------------------------|------------------------------|------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1. 14^2 | 2. 27^2 | 3. 65^2 | 4. 89^2 | 5. 98^2 |
| 6. 31^2 | 7. 41^2 | 8. 59^2 | 9. 26^2 | 10. 53^2 |
| 11. 21^2 | 12. 64^2 | 13. 42^2 | 14. 55^2 | 15. 75^2 |
| 16. 45^2 | 17. 84^2 | 18. 67^2 | 19. 103^2 | 20. 208^2 |

Зера Колберн: занимательные расчеты

Одним из первых извлечь выгоду из своего таланта — умения производить вычисления молниеносно — сумел Зера Колберн (1804–1839), сын американского фермера из Вермонта, который выучил таблицу умножения до 100 даже раньше, чем научился читать и писать. Когда юному дарованию исполнилось шесть лет, его отец организовал тур, и выступления Зеры позволили скопить достаточный капитал для того, чтобы отправить мальчика в школу в Париже или Лондоне. В возрасте восьми лет он был известен во всем мире, выступал со своими молниеносными расчетами в Англии и был охарактеризован в *Annual Register* как «возможно, самый исключительный феномен в истории человеческого разума из когда-либо существовавших». Майкл Фарадей и Сэмюэль Морзе восхищались его талантом.

Где бы Колберн ни выступал, он всегда опережал всех соперников в скорости и точности. В автобиографии он рассказывает о наборе задач, которые ему задали в Нью-Хэмпшире в июне 1811 года: «Сколько дней и часов прошло с момента рождения Христа 1811 лет назад? Ответил за двадцать секунд: 661 015 дней, 15 864 360 часов. Сколько секунд содержится в одиннадцати годах? Ответил за четыре секунды: 346 896 000. Колберн использовал методы, описанные в этой книге, чтобы проводить вычисления исключительно в уме. Например, он раскладывал большое число на меньшие сомножители и затем перемножал их: однажды Колберн умножил $21\,734 \times 543$ путем разложения 543 как 181×3 . Затем он умножил $21\,734 \times 181$, чтобы получить 3 933 854, и наконец умножил это число на 3, чтобы получить в итоге 11 801 562.

Как часто бывает с такими людьми, интерес к удивительным способностям Колберна со временем утих, и в возрасте двадцати лет юноша вернулся в США и стал проповедником-методистом. Он умер в возрасте тридцати пяти лет. Подытоживая информацию о своих способностях к молниеносным

вычислениям и преимуществам, которые такой дар дает, Колберн размышлял: «Действительно, метод... требует большего количества вычислений, чем общее правило. Зато запомнится то, что ручка, чернила и бумага обходились Зере очень дешево».

ПОЧЕМУ ЭТИ ПРИЕМЫ РАБОТАЮТ

Этот раздел предназначен для учителей, студентов, любителей математики и всех, кому любопытно, почему этот метод работает. Некоторые найдут теоретическую сторону вопроса не менее интересной, чем практическая. К счастью, вам не нужно разбираться в том, почему метод работает, для того чтобы научиться его применять. Всем магическим трюкам есть рациональное объяснение. И математические не исключение. И вот прямо сейчас маг от математики раскроет свои самые сокровенные тайны!

В этой главе, посвященной задачам на умножение, мы применили дистрибутивный (распределительный) закон, который позволял нам разбивать задачи на части. Данный закон гласит, что для любых чисел a , b и c

$$(b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a)$$

То есть число за скобками распределяется и по отдельности умножается на каждое из чисел в скобках. Например, в первой задаче на умножение 42×7 мы добрались до итогового ответа с помощью представления 42 в виде $40 + 2$, а затем помножили на 7 каждое из них следующим образом:

$$42 \times 7 = (40 + 2) \times 7 = (40 \times 7) + (2 \times 7) = 280 + 14 = 294$$

Вы можете спросить, почему распределительный закон в принципе работает. Чтобы понять его интуитивно, представьте, что у вас есть 7 сумок, в каждой по 42 монеты, 40 из которых золотые, а 2 серебряные. Сколько всего у вас монет? Существует два способа получить ответ. С одной стороны, исходя из определения умножения, скажем, что у вас есть 42×7 монет. С другой — всего 40×7 золотых и 2×7 серебряных монет. Следовательно, всего имеем $(40 \times 7) + (2 \times 7)$ монет. Отвечая на наш вопрос двумя способами, получим $42 \times 7 = (40 \times 7) + (2 \times 7)$. Обратите внимание, что числа 7, 40 и 2 можно заменить любыми другими (a , b или c), сохранив общий логический принцип. Вот почему распределительный метод работает!

Используя подобную аргументацию о золотых, серебряных и медных монетах, получим более общий закон.

$$(b + c + d) \times a = (b \times a) + (c \times a) + (d \times a)$$

Следовательно, чтобы умножить 326×7 , разбиваем 326 как $300 + 20 + 6$. Потом умножаем на 7 следующим образом: $326 \times 7 = (300 + 20 + 6) \times 7 = (300 \times 7) + (20 \times 7) + (6 \times 7)$, а затем складываем отдельные произведения.

Что касается возведения в квадрат, представленный ниже алгебраический закон оправдывает мой метод. (A и d — любые числа.)

$$A^2 = (A + d) \times (A - d) + d^2$$

Здесь A — число, которое возводится в квадрат; d — любое число, но я выбрал в его качестве разности между A и ближайшим кратным 10. Поэтому для 77^2 я определил $d = 3$, и наша формула показывает, что $77^2 = (77 + 3) \times (77 - 3) + 3^2 = (80 \times 74) + 9 = 5929$. Алгебраические соотношения следующего вида также объясняют мой метод возведения в квадрат.

Произведения растроченной юности: основы умножения

$$(z + d)^2 = z^2 + 2zd + d^2 = z(z + 2d) + d^2$$

Следовательно, чтобы возвести в квадрат 41, мы зададим $z = 40$ и $d = 1$, чтобы получить

$$41^2 = (40 + 1)^2 = 40 \times (40 + 2) + 1^2 = 1681$$

Подобным образом имеем

$$(z - d)^2 = z(z - 2d) + d^2$$

Чтобы найти 77^2 , полагаем $z = 80$ и $d = 3$. Тогда

$$77^2 = (80 - 3)^2 = 80 \times (80 - 6) + 3^2 = 80 \times 74 + 9 = 5929$$

Глава 3

Усовершенствованные произведения: умножение среднего уровня

Магия чисел действительно захватывает, когда выступаешь перед аудиторией. Мой первый опыт публичных выступлений пришелся на восьмой класс, в уже довольно «преклонном возрасте» тринадцати лет. Многие математика начинали еще раньше. Например, Зера Колберн (1804–1839) мог производить молниеносные расчеты еще до того, как научился читать и писать, и начал развлекать зрителей в возрасте шести лет! Когда мне было тринадцать, моя учительница алгебры записала на доске задачу, где следовало вычислить 108^2 . Я быстро выпалил: «108 в квадрате будет 11 664!»

Учительница сделала расчет на доске и получила такой же ответ. Глядя немного испуганно, она произнесла: «Да, верно. Как ты это сделал?» Тут я ей и выложил: «Я округлил 108 до 100 и увеличил 108 до 116. После перемножил 116 на 100, получил 11 600, а потом просто прибавил квадрат 8, в итоге получилось 11 664».

Она никогда раньше не сталкивалась с таким методом. Я был взволнован. Даже успел самонадеянно подумать о «теореме Бенджамина». Я на самом деле верил в то, что открыл нечто новое. Когда я в конце концов наткнулся на этот метод спустя несколько лет в книге Мартина Гарднера по занимательной

Усовершенствованные произведения: умножение среднего уровня

математике Mathematical Carnival («Математический карнавал», 1965), мой день был испорчен! Хотя то, что я сам нашел его, все же воодушевляло.

Вы тоже можете произвести впечатление на друзей (или учителей), используя некоторые из довольно удивительных примеров на умножение. В конце предыдущей главы вы узнали, как умножить двузначное число само на себя. В этой главе вы научитесь перемножать два разных двузначных числа, а затем попробуете приложить руку (вернее, мозг) к возведению трехзначных чисел в квадрат. При этом для решения таких задач не обязательно знать, как умножить два двузначных числа. Так что можете начать осваивать любой из этих навыков в любом порядке.

ЗАДАЧИ НА УМНОЖЕНИЕ ТИПА «2 НА 2»

При возведении в квадрат двузначного числа всегда применяется одинаковый метод. Но перемножать двузначные числа можно разными способами, которые в итоге приведут вас к одному и тому же ответу. Лично для меня здесь и начинается самое интересное.

Первый метод, назовем его «метод сложения», можно применять для решения любых задач на умножение типа «2 на 2».

Метод сложения

В методе сложения при перемножении двух двузначных чисел надо всего лишь решить две задачи на умножение типа «2 на 1» и суммировать результаты, например:

$$\begin{array}{r} 46 \\ \times 42 \quad (40 + 2) \\ \hline 40 \times 46 = 1840 \\ 2 \times 46 = + 92 \\ \hline 1932 \end{array}$$

Итак, 42 разбиваем на 40 и 2, после чего умножаем 40×46 (а это всего лишь 4×46 с добавочным нулем, то есть 1840); затем $2 \times 46 = 92$. Наконец складываем $1840 + 92 = 1932$, как и показано выше.

Вот еще один способ решения той же задачи:

$$\begin{array}{r}
 46 (40 + 6) \\
 \times 42 \\
 \hline
 40 \times 42 = 1680 \\
 6 \times 42 = + 252 \\
 \hline
 1932
 \end{array}$$

Но здесь есть небольшая проблема, которая заключается в том, что умножить 6×42 сложнее, чем 2×46 , как в первом способе. Более того, прибавить $1680 + 252$ сложнее, чем суммировать $1840 + 92$. Так как же решить, какое из чисел разбивать на части? Я стараюсь выбирать то, которое приведет к более простой задаче на сложение. В большинстве случаев, но не всегда, желательно разбивать число с наименьшей цифрой в конце, потому что это обычно приводит к меньшим числам при сложении.

Попробуйте свои силы на следующих примерах.

$$\begin{array}{r}
 48 \\
 \times 73 (70 + 3) \\
 \hline
 70 \times 48 = 3360 \\
 3 \times 48 = + 144 \\
 \hline
 3504
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 81 (80 + 1) \\
 \times 59 \\
 \hline
 80 \times 59 = 4720 \\
 1 \times 59 = + 59 \\
 \hline
 4779
 \end{array}$$

В последнем примере показано, почему числа с 1 в конце лучше всего представлять в виде суммы. В случае если оба числа оканчиваются на одинаковую цифру, следует делить на части большее число, как показано ниже.

Усовершенствованные произведения: умножение среднего уровня

$$\begin{array}{r} 84 (80 + 4) \\ \times 34 \\ \hline 80 \times 34 = 2720 \\ 4 \times 34 = + 136 \\ \hline 2856 \end{array}$$

Если одно из чисел намного больше другого, то его разбиение часто оправдывает себя, даже если цифра на конце больше цифры на конце меньшего числа. Вы поймете, что я имею в виду, когда решите следующие задачи двумя разными способами.

$$\begin{array}{r} 74 (70 + 4) \\ \times 13 \\ \hline 70 \times 13 = 910 \\ 4 \times 13 = + 52 \\ \hline 962 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 74 \\ \times 13 (10 + 3) \\ \hline 10 \times 74 = 740 \\ 3 \times 74 = + 222 \\ \hline 962 \end{array}$$

Показались ли вам первый способ быстрее второго? Мне — да.

Вот еще одно исключение из правила: разбивайте на части число с наименьшей цифрой на конце. При умножении числа, близкого и большего 50, на четное, следует разбить на части именно число, близкое к 50.

$$\begin{array}{r} 84 \\ \times 59 (50 + 9) \\ \hline 50 \times 84 = 4200 \\ 9 \times 84 = + 756 \\ \hline 4956 \end{array}$$

Последняя цифра числа 84 меньше, чем цифра на конце числа 59. Но если разбить на части 59, то результат первого умножения будет кратным 100, что упрощает последующую задачу на сложение.

Теперь попробуйте решить легкую задачу другого типа.

$$\begin{array}{r}
 42 \\
 \times 11 \text{ (10 + 1)} \\
 \hline
 10 \times 42 = 420 \\
 1 \times 42 = \underline{42} \\
 \hline
 462
 \end{array}$$

Хотя вычисления, представленные выше, достаточно просты, существует еще более простой и быстрый способ умножения числа на 11. Это магия чисел во всей красе: вы не поверите своим глазам, когда увидите! (Если, конечно, вы еще не забыли, что читали в главе 0.)

Вот как это работает. Представьте себе двузначное число, цифры которого в сумме дают 9 или меньше. Для умножения такого числа на 11 просто сложите эти две цифры и вставьте полученную сумму между двух исходных цифр. Например, чтобы умножить 42×11 , сначала складываем $4 + 2 = 6$. Поместив 6 между 4 и 2, получаем 462, что и является решением!

$$\begin{array}{r}
 42 \quad 4 \quad \underline{2} = 462 \\
 \times 11 \quad 6
 \end{array}$$

Вычислите 54×11 , используя данный метод.

$$\begin{array}{r}
 54 \quad 5 \quad \underline{4} = 594 \\
 \times 11 \quad 9
 \end{array}$$

Что может быть проще? Все, что вам нужно, — поставить 9 между 5 и 4 и получить окончательный ответ 594.

Но что делать, когда сумма двух чисел больше 9? В таких случаях надо увеличить цифру десятков на 1, а затем вставить последнюю цифру суммы между двумя числами, как и прежде. Например, при умножении 76×11 суммируете $7 + 6 = 13$, увеличиваете цифру 7 в числе 76 до 8, а затем

Усовершенствованные произведения: умножение среднего уровня

вставляете 3 между 8 и 6, что дает окончательный ответ 836. Посмотрите на схему вычислений:

$$\begin{array}{r} 76 \quad 7 _ 6 = 836 \\ \times 11 \quad 1 \ 3 \end{array}$$

Попробуйте самостоятельно умножить 68×11 .

$$\begin{array}{r} 68 \quad 6 _ 8 = 748 \\ \times 11 \quad 1 \ 4 \end{array}$$

После того как вы освоите этот метод, вы никогда не станете умножать числа на 11 по-другому. Решите несколько задач, а затем сверьтесь с ответами в конце книги.

УПРАЖНЕНИЕ: УМНОЖЕНИЕ НА 11

$$\begin{array}{l} 1. \quad 35 \quad 2. \quad 48 \quad 3. \quad 94 \\ \quad \times 11 \quad \quad \times 11 \quad \quad \times 11 \end{array}$$

Следующую задачу вначале бывает очень трудно решить. Попробуйте умножить 89×72 в уме, подглядывая в случае необходимости в решение. Если вы справились с ней за две попытки, то все в порядке.

$$\begin{array}{r} 89 \\ \times 72 \ (70 + 2) \\ 70 \times 89 = 6230 \\ 2 \times 89 = + 178 \\ \hline 6408 \end{array}$$

Если вы получили правильный ответ с первого или второго раза, похлопайте себя по плечу. В действительности не найдется задач на умножение типа «2 на 2» труднее этой. Если вы не получили ответ сразу, не волнуйтесь. В следующих двух разделах я обучу вас более простым стратегиям

для решения подобных задач. Но прежде чем продолжить чтение, попрактикуйтесь в методе сложения на следующих задачах на умножение.

УПРАЖНЕНИЕ:
МЕТОД СЛОЖЕНИЯ ДЛЯ УМНОЖЕНИЯ ТИПА «2 НА 2»

1. 31	2. 27	3. 59	4. 53
× 41	× 18	× 26	× 58
5. 77	6. 23	6. 62	8. 88
× 43	× 84	× 94	× 76
9. 92	10. 34	11. 85	
× 35	× 11	× 11	

Метод вычитания

Метод вычитания может пригодиться, когда одно из умножаемых чисел заканчивается на 8 или 9. Следующий пример показывает, что я имею в виду.

$$\begin{array}{r}
 59 \text{ (} 60 - 1 \text{)} \\
 \times 17 \\
 \hline
 60 \times 17 = 1020 \\
 -1 \times 17 = -17 \\
 \hline
 1003
 \end{array}$$

Хотя большинство людей находят, что сложение легче вычитания, порой удобнее отнять маленькое число, чем прибавить большое. (Если бы мы решали эту задачу методом сложения, то пришлось бы складывать $850 + 153 = 1003$.)

Теперь рассмотрим сложную задачу, приведенную в конце предыдущего раздела.

Усовершенствованные произведения: умножение среднего уровня

$$\begin{array}{r} \mathbf{89 (90 - 1)} \\ \times \mathbf{72} \\ \hline \mathbf{90 \times 72 = 6480} \\ \mathbf{-1 \times 72 = -72} \\ \hline \mathbf{6408} \end{array}$$

Разве это не намного проще? А вот задача, где одно из чисел заканчивается на 8.

$$\begin{array}{r} \mathbf{88 (90 - 2)} \\ \times \mathbf{23} \\ \hline \mathbf{90 \times 23 = 2070} \\ \mathbf{-2 \times 23 = -46} \\ \hline \mathbf{2024} \end{array}$$

В данном случае следует поступить с числом 88 так: вычитаем $90 - 2$, затем умножаем $90 \times 23 = 2070$. Но мы умножили с лишком. Каким? Он равен $2 \times 23 = 46$. Так что для получения ответа 2024 надо вычесть 46 из 2070.

Хочу подчеркнуть, что важно решать такие примеры в уме, а не просто изучать, как это делается. Пропускайте через себя эти задачи, проговаривайте выполняемые действия вслух, чтобы подкрепить свои размышления.

Я использую метод вычитания не только для чисел, оканчивающихся на 8 или 9, но и для чисел, близких и больших 90, поскольку 100 — очень удобное число для умножения. Например, если кто-то попросит меня умножить 96 на 73, я незамедлительно округлю 96 до 100.

$$\begin{array}{r} \mathbf{96 (100 - 4)} \\ \times \mathbf{73} \\ \hline \mathbf{100 \times 73 = 7300} \\ \mathbf{-4 \times 73 = -292} \\ \hline \mathbf{7008} \end{array}$$

Когда действие на вычитание внутри задачи на умножение требует держать числа в уме, использование дополнений (которые мы изучили в главе 1) ускорит получение ответа. Вы поймете, о чем я говорю, когда поработаете над задачами, приведенными ниже. Например, вычтите из 340 число 78. Нам известно, что ответ будет в области «200 плюс». Разность между 40 и 78 составляет 38. С помощью дополнения к 38, которое равно 62, получаем ответ 262!

$$\begin{array}{r} 340 \\ - 78 \\ \hline 262 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 78 - 40 = 38 \\ \text{Дополнение для } 38 = 62 \end{array}$$

Теперь следующая задача.

$$\begin{array}{r} 88 (90 - 2) \\ \times 76 \\ \hline 90 \times 76 = 6840 \\ -2 \times 76 = -152 \\ \hline \end{array}$$

Есть два пути вычитания внутри данной задачи. *Длинный* путь состоит из вычитания 200 и прибавления 48.

$$6840 - 152 = 6640 + 48 = 6688.$$

(сначала вычитаем 200) (затем прибавляем 48)

Короткий путь заключается в понимании того, что ответ будет равен 6600 и «сколько-то еще». Для определения этого «сколько-то» вычитаем $52 - 40 = 12$, а затем находим дополнение для 12, которое равно 88. Следовательно, ответ — 6688.

Попробуйте решить такой пример.

$$\begin{array}{r} 67 \\ \times 59 (60 - 1) \\ \hline 60 \times 67 = 4020 \\ -1 \times 67 = -67 \\ \hline 3953 \end{array}$$

Снова идем коротким путем, взяв за основу ответ 3900 и сколько-то еще. Так как $67 - 20 = 47$, а дополнение для 47 — это 53, ответ — 3953.

Как вы, наверное, поняли, использование данного метода возможно в любой задаче на вычитание, в которой требуется держать числа в уме, а не только тогда, когда она является частью решения задачи на умножение. Все это служит еще одним доказательством того (если вам нужны доказательства), что дополнение — очень мощный инструмент в математической магии. Освойте эту технику, и довольно скоро люди начнут рассыпать вам комплименты!

УПРАЖНЕНИЕ:

МЕТОД ВЫЧИТАНИЯ ДЛЯ УМНОЖЕНИЯ ТИПА «2 НА 2»

1. 29	2. 98	3. 47	4. 68
× 45	× 43	× 59	× 38
5. 96	6. 79	6. 37	8. 87
× 29	× 54	× 19	× 22
9. 85	10. 57	11. 88	
× 38	× 39	× 49	

Метод разложения

Метод разложения — мой любимый метод умножения двузначных чисел, поскольку в нем совсем не используются сложение и вычитание. Его следует применять, когда один из множителей можно разложить на множители, состоящие из одной цифры, которые при перемножении дадут исходное число. Например, число 24 можно представить в виде 8×3 или 6×4 . (Возможно также разложение в виде 12×2 , но мы отдаем предпочтение использованию однозначных чисел.)

Вот еще несколько примеров разложения чисел:

$$42 = 7 \times 6,$$

$$63 = 9 \times 7,$$

$$84 = 7 \times 6 \times 2 \text{ или } 7 \times 4 \times 3.$$

Чтобы посмотреть, как разложение облегчает процесс умножения, рассмотрим следующий пример.

$$\begin{array}{r} 46 \\ \times 42 \\ \hline \end{array} = 7 \times 6$$

Ранее мы решали его путем умножений 46×40 и 46×2 и последующего сложения сумм. Чтобы использовать метод разложения, представим 42 как 7×6 и начнем с умножения 46×7 , что равняется 322. Затем умножим 322×6 и получим ответ 1932. Вы знаете, как решать задачи на умножение типа «2 на 1» и «3 на 1», так что решить этот пример для вас не составит труда.

$$46 \times 42 = 46 \times (7 \times 6) = (46 \times 7) \times 6 = 322 \times 6 = 1932.$$

Конечно, множители при разложении числа 42 можно поменять местами:

$$46 \times 42 = 46 \times (6 \times 7) = (46 \times 6) \times 7 = 276 \times 7 = 1932.$$

В данном примере легче умножить 322×6 , чем 276×7 . Чаще всего я предпочитаю использовать больший множитель при решении исходной задачи типа «2 на 1» и сохраняю меньший множитель для его применения в случае задачи «3 на 1». Разложение упрощает задачу на умножение типа «2 на 2» до более легкой задачи типа «3 на 1» (иногда даже до «2 на 1»).

Преимущество этого метода разложения для устных вычислений состоит в том, что вам не приходится слишком многое держать в памяти. Рассмотрим другой пример 75×63 .

Усовершенствованные произведения: умножение среднего уровня

$$75 \times 63 = 75 \times (9 \times 7) = (75 \times 9) \times 7 = 675 \times 7 = 4725.$$

Как и прежде, вы упрощаете этот пример типа «2 на 2» путем разложения 63 на 9×7 и затем умножаете 75 на эти числа. (Кстати, мы можем переставить скобки во втором шаге вычислений по ассоциативному, или сочетательному, закону умножения.)

$$63 \times 75 = 63 \times (5 \times 5 \times 3) = (63 \times 5) \times 5 \times 3 = 315 \times 5 \times 3 = 1575 \times 3 = 4725.$$

Потренируйтесь на следующем примере:

$$57 \times 24 = 57 \times 8 \times 3 = 456 \times 3 = 1368.$$

Здесь можно разложить 24 как 6×4 для перехода к другому простому варианту вычислений:

$$57 \times 24 = 57 \times 6 \times 4 = 342 \times 4 = 1368.$$

Сравните данный подход с методом сложения.

	57	<i>или</i>	57 (50 + 7)	
	<u>× 24 (20 + 4)</u>		<u>× 24</u>	
20 × 57 =	1140		50 × 24 =	1200
4 × 57 =	+ 228		7 × 24 =	+ 168
	1368			1368

В рамках метода сложения необходимо решить две задачи на умножение типа «2 на 1», а затем суммировать результаты. При использовании метода разложения вам нужно выполнить только два действия на умножение типа «2 на 1» и «3 на 1». Метод разложения обычно снисходителен к вашей памяти.

Помните ту трудную задачу на умножение из предыдущей части этой главы? Вот она:

$$\begin{array}{r} 89 \\ \times 72 \\ \hline \end{array}$$

Мы решили ее достаточно легко с помощью метода вычитания, но разложение работает еще быстрее:

$$89 \times 72 = 89 \times 9 \times 8 = 801 \times 8 = 6408.$$

Задача существенно облегчается тем, что в середине числа 801 находится 0. Следующий пример показывает, что поиск варианта разложения чисел, позволяющего воспользоваться подобной ситуацией (когда есть 0 в середине числа), часто бывает оправданным. Рассмотрим два способа вычисления 67×42 .

$$67 \times 42 = 67 \times 7 \times 6 = 469 \times 6 = 2814.$$

$$67 \times 42 = 67 \times 6 \times 7 = 402 \times 7 = 2814.$$

Обычно 42 раскладывают как 7×6 , следуя правилу «используй больший множитель в первую очередь». Но задачу легче решить, разложив 42 как 6×7 , поскольку это приводит к созданию числа с 0 в середине, что облегчает умножение. Я называю такие числа *дружелюбными произведениями*.

Ниже поиск дружелюбного произведения проведен в процессе умножения двумя способами.

$$43 \times 56 = 43 \times 8 \times 7 = 344 \times 7 = 2408.$$

$$43 \times 56 = 43 \times 7 \times 8 = 301 \times 8 = 2408.$$

Не показался ли вам второй вариант более легким?

Применяя метод разложения, выгодно отыскивать дружелюбные произведения везде, где только можно. Следующий список должен в этом помочь. Я жду от вас не столько его запоминания, сколько простого ознакомления с ним. Практикуясь, вы научитесь интуитивно определять дружелюбные произведения, и этот список станет для вас хорошим подспорьем.

Числа с дружлюбными произведениями

- 12: $12 \times 9 = 108$.
13: $13 \times 8 = 104$.
15: $15 \times 7 = 105$.
17: $17 \times 6 = 102$.
18: $18 \times 6 = 108$.
21: $21 \times 5 = 105$.
23: $23 \times 9 = 207$.
25: $25 \times 4 = 100$, $25 \times 8 = 200$.
26: $26 \times 4 = 104$, $26 \times 8 = 208$.
27: $27 \times 4 = 108$.
29: $29 \times 7 = 203$.
34: $34 \times 3 = 102$, $34 \times 6 = 204$, $34 \times 9 = 306$.
35: $35 \times 3 = 105$.
36: $36 \times 3 = 108$.
38: $38 \times 8 = 304$.
41: $41 \times 5 = 205$.
43: $43 \times 7 = 301$.
44: $44 \times 7 = 308$.
45: $45 \times 9 = 405$.
51: $51 \times 2 = 102$, $51 \times 4 = 204$, $51 \times 6 = 306$, $51 \times 8 = 408$.
52: $52 \times 2 = 104$, $52 \times 4 = 208$.
53: $53 \times 2 = 106$.
54: $54 \times 2 = 108$.
56: $56 \times 9 = 504$.
61: $61 \times 5 = 305$.
63: $63 \times 8 = 504$.
67: $67 \times 3 = 201$, $67 \times 6 = 402$, $67 \times 9 = 603$.
68: $68 \times 3 = 204$, $68 \times 6 = 408$.
72: $72 \times 7 = 504$.
76: $76 \times 4 = 304$, $76 \times 8 = 608$.
77: $77 \times 4 = 308$.

78: **$78 \times 9 = 702$.**

81: **$81 \times 5 = 405$.**

84: **$84 \times 6 = 504$.**

88: **$88 \times 8 = 704$.**

89: **$89 \times 9 = 801$.**

Ранее в этой главе вы обучились легкому способу умножать числа на 11. Он применим в методе разложения в ситуации, когда один из множителей равен 11, как в данном примере.

$$52 \times 33 = 52 \times 11 \times 3 = 572 \times 3 = 1716.$$

$$83 \times 66 = 83 \times 11 \times 6 = 913 \times 6 = 5478.$$

УПРАЖНЕНИЕ:

МЕТОД РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ УМНОЖЕНИЯ ТИПА «2 НА 2»

1. 27 × 14	2. 86 × 28	3. 57 × 14	4. 81 × 48
-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------

5. 56 × 29	6. 83 × 18	6. 72 × 17	8. 85 × 42
-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------

9. 33 × 16	10. 62 × 77	11. 45 × 36	12. 48 × 37
-----------------------------	------------------------------	------------------------------	------------------------------

ТВОРЧЕСКИЙ ПОДХОД К УМНОЖЕНИЮ

Я уже упоминал в начале главы, что решать задачи на умножение — одно удовольствие, так как это можно сделать любым количеством способов. Теперь, когда вы поняли, что я имею в виду, применим все три метода, приведенные в этой главе, к одной задаче. Начнем с метода сложения.

Усовершенствованные произведения: умножение среднего уровня

$$\begin{array}{r} 73 \text{ (70 + 3)} \\ \times 49 \\ \hline 70 \times 49 = 3430 \\ 3 \times 49 = + 147 \\ \hline 3577 \end{array}$$

Теперь метод вычитания.

$$\begin{array}{r} 73 \\ \times 49 \text{ (50 - 1)} \\ \hline 50 \times 73 = 3650 \\ -1 \times 73 = - 73 \\ \hline 3577 \end{array}$$

Обратите внимание, что две последние цифры могут быть получены путем сложения $50 +$ (дополнение для 73), то есть $50 + 27 = 77$, или путем вычисления дополнения для разности 73 и 50; дополнение для $23 = 77$.

И наконец, метод разложения:

$$73 \times 49 = 73 \times 7 \times 7 = 511 \times 7 = 3577.$$

Поздравляю! Вы освоили умножение типа «2 на 2» и теперь обладаете всеми необходимыми базовыми навыками для быстрых устных вычислений. Все, что вам нужно для превращения в молниеносного вычислителя, — это больше практики!

УПРАЖНЕНИЕ:

УМНОЖЕНИЕ ТИПА «2 НА 2» ЛЮБЫМ СПОСОБОМ!

У этих упражнений есть несколько вариантов решения. Попробуйте выполнять вычисления столькими способами, сколько вспомните. Затем сверьте свои ответы с данными в конце книги. Наши ответы предлагают различные магические пути решения задач, начиная с самых простых.

$$\begin{array}{r}
 1. \quad \mathbf{53} \\
 \times \mathbf{39} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2. \quad \mathbf{81} \\
 \times \mathbf{57} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 3. \quad \mathbf{73} \\
 \times \mathbf{18} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 4. \quad \mathbf{89} \\
 \times \mathbf{55} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 5. \quad \mathbf{77} \\
 \times \mathbf{36} \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6. \quad \mathbf{92} \\
 \times \mathbf{53} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 6. \quad \mathbf{87} \\
 \times \mathbf{87} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 8. \quad \mathbf{67} \\
 \times \mathbf{58} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 9. \quad \mathbf{56} \\
 \times \mathbf{37} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 10. \quad \mathbf{59} \\
 \times \mathbf{21} \\
 \hline
 \end{array}$$

Следующие задачи типа «2 на 2» представляют собой подзадачи более сложных задач типа «3 на 2», «3 на 3» и «5 на 5», с которыми вы встретитесь позже. Вы можете решать их сейчас, чтобы поупражняться, а затем снова обратиться к ним, когда они будут включены в большие примеры.

$$\begin{array}{r}
 11. \quad \mathbf{37} \\
 \times \mathbf{72} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 12. \quad \mathbf{57} \\
 \times \mathbf{73} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 13. \quad \mathbf{38} \\
 \times \mathbf{63} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 14. \quad \mathbf{43} \\
 \times \mathbf{76} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 15. \quad \mathbf{43} \\
 \times \mathbf{75} \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 16. \quad \mathbf{74} \\
 \times \mathbf{62} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 17. \quad \mathbf{61} \\
 \times \mathbf{37} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 18. \quad \mathbf{36} \\
 \times \mathbf{41} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 19. \quad \mathbf{54} \\
 \times \mathbf{53} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 20. \quad \mathbf{53} \\
 \times \mathbf{53} \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 21. \quad \mathbf{83} \\
 \times \mathbf{58} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 22. \quad \mathbf{91} \\
 \times \mathbf{46} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 23. \quad \mathbf{52} \\
 \times \mathbf{47} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 24. \quad \mathbf{29} \\
 \times \mathbf{26} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 25. \quad \mathbf{41} \\
 \times \mathbf{15} \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 26. \quad \mathbf{65} \\
 \times \mathbf{19} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 27. \quad \mathbf{34} \\
 \times \mathbf{27} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 28. \quad \mathbf{69} \\
 \times \mathbf{78} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 29. \quad \mathbf{95} \\
 \times \mathbf{81} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 30. \quad \mathbf{65} \\
 \times \mathbf{47} \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 31. \quad \mathbf{65} \\
 \times \mathbf{69} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 32. \quad \mathbf{95} \\
 \times \mathbf{26} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 33. \quad \mathbf{41} \\
 \times \mathbf{93} \\
 \hline
 \end{array}$$

ВОЗВЕДЕНИЕ В КВАДРАТ ТРЕХЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

Возведение в квадрат трехзначных чисел — впечатляющее проявление искусства в ментальном фокусничестве. Так же как при возведении в квадрат двузначного числа выполняется его округление в большую или меньшую сторону для

получения кратного 10, для возведения трехзначного числа в квадрат его нужно округлить в большую или меньшую сторону для получения кратного 100. Возведем в квадрат число 193.

$$193^2 \begin{cases} \xrightarrow{+7} 200 \\ \xrightarrow{-7} 186 \end{cases} \rightarrow 37\,200 + 7^2 = 37\,249.$$

Путем округления 193 до 200 (второй сомножитель стал равным 186) задача типа «3 на 3» преобразовалась в более простую типа «3 на 1», так как 200×186 — это всего лишь $2 \times 186 = 372$ с двумя нулями в конце. Почти готово! Теперь все, что нужно сделать, это прибавить $7^2 = 49$ и получить ответ — 37 249.

Попробуем возвести в квадрат 706.

$$706^2 \begin{cases} \xrightarrow{+6} 712 \\ \xrightarrow{-6} 700 \end{cases} \rightarrow 498\,400 + 6^2 = 498\,436.$$

При округлении числа 706 до 700 необходимо еще и изменить это же число на 6 в большую сторону для получения 712. Так как $712 \times 7 = 4984$ (простая задача типа «3 на 1»), $712 \times 700 = 498\,400$. Прибавив $6^2 = 36$, получаем 498 436.

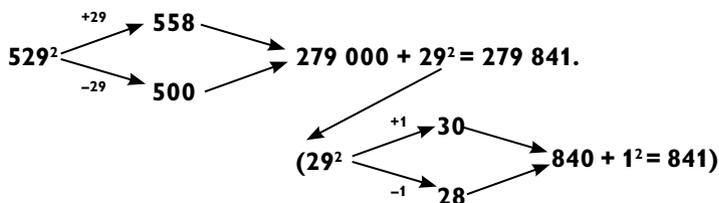
Последние примеры не так уж страшны, потому что не включают в себя сложения как такового. Кроме того, вы наизусть знаете, чему равняются 6^2 и 7^2 . Возводить в квадрат число, которое отстоит от кратного 100 больше чем на 10 единиц, значительно труднее. Попробуйте свои силы с 314^2 .

$$314^2 \begin{cases} \xrightarrow{+14} 328 \\ \xrightarrow{-14} 300 \end{cases} \rightarrow 98\,400 + 14^2 = 98\,596.$$

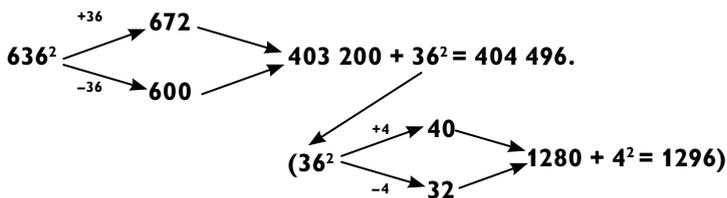
$$(14^2) \begin{cases} \xrightarrow{+4} 18 \\ \xrightarrow{-4} 10 \end{cases} \rightarrow 180 + 4^2 = 196$$

В этом примере число 314 уменьшилось на 14 ради округления до 300 и увеличилось на 14 до 328. Умножаем $328 \times 3 = 984$ и добавляем два нуля в конце, чтобы получить 98 400. Затем прибавляем квадрат 14. Если вам мгновенно приходит на ум (благодаря памяти или быстрым вычислениям), что $14^2 = 196$, то вы в хорошей форме. Далее просто сложите $98\,400 + 196$ для получения окончательного ответа 98 596. Если вам нужно время для подсчета 14^2 , повторите «98 400» несколько раз, прежде чем продолжить. Иначе можно вычислить $14^2 = 196$ и забыть, к какому числу нужно прибавить произведение.

Чем дальше число, возводимое в квадрат, отстоит от кратного 100, тем сложнее становятся вычисления. Попробуйте возвести в квадрат 529.



Если у вас есть аудитория, которую вы хотели бы впечатлить, можете произнести вслух «279 000», прежде чем найдете 292. Но такое не пройдет в случае каждой решаемой задачи. Например, попытайтесь возвести в квадрат 636.



Теперь ваш мозг по-настоящему заработал, не правда ли? Не забывайте повторять «403 200» самому себе несколько раз, пока будете возводить в квадрат привычным способом 36, чтобы получить 1296. Самое сложное — суммировать $1296 + 403\ 200$. Делайте это по одной цифре за раз, слева направо, и получите ответ 404 496. Даю слово, что, как только вы лучше ознакомитесь с возведением в квадрат двузначных чисел, задачи с трехзначными значительно упростятся.

Вот еще более сложный пример: 863^2 .

$$863^2 \begin{cases} \rightarrow 900 \\ \rightarrow 8(?) \end{cases}$$

Первая проблема — надо решить, какие числа перемножать. Несомненно, одно из них будет 900, а другое — больше 800. Но какое именно? Это можно рассчитать двумя способами.

1. Сложный способ: разность между 863 и 900 составляет 37 (дополнение для 63), вычитаем 37 из 863 и получаем 826.
2. Легкий способ: удваиваем число 63, получаем 126, теперь последние две цифры этого числа прибавляем к числу 800, что в итоге даст 826.

Вот как работает легкий способ. Поскольку оба числа имеют одинаковую разность с числом 863, их сумма должна равняться удвоенному числу 863, то есть 1726. Одно из чисел 900, значит, другое будет равно 826.

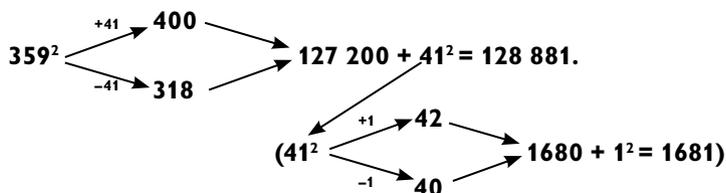
Затем проводим следующие вычисления.

$$863^2 \begin{cases} \xrightarrow{+37} 900 \\ \xrightarrow{-37} 826 \end{cases} \rightarrow 743\ 400 + 37^2 = 744\ 769.$$

$$(37^2 \begin{cases} \xrightarrow{+3} 40 \\ \xrightarrow{-3} 34 \end{cases} \rightarrow 1360 + 3^2 = 1369)$$

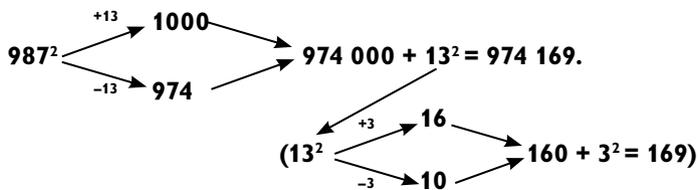
Если вам трудно вспомнить число 743 400 после возведения в квадрат числа 37, не расстраивайтесь. В следующих главах вы узнаете систему мнемотехники и научитесь запоминать такие числа.

Попробуйте свои силы на самой трудной пока задаче — на возведении в квадрат числа 359.



Для получения 318 либо отнимите 41 (дополнение для 59) от 359, либо умножьте $2 \times 59 = 118$ и используйте последние две цифры. Далее умножьте $400 \times 318 = 127\,200$. Прибавление к этому числу $41^2 = 1681$ даст в сумме 128 881. Вот и все! Если вы сделали все правильно с первого раза, вы молодец!

Завершим этот раздел большой, но легкой задачей: вычислим 987^2 .



УПРАЖНЕНИЕ:

ВОЗВЕДЕНИЕ В КВАДРАТ ТРЕХЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

- | | | | |
|------------|-------------|-------------|------------|
| 1. 409^2 | 2. 805^2 | 3. 217^2 | 4. 896^2 |
| 5. 345^2 | 6. 346^2 | 6. 276^2 | 8. 682^2 |
| 9. 413^2 | 10. 781^2 | 11. 975^2 | |

Что за дверью номер 1?

Математической банальностью 1991 года, которая поставила всех в тупик, оказалась статья Мэрилин Савант — женщины с самым высоким в мире IQ (что зарегистрировано в Книге рекордов Гиннеса) — в журнале Parade. Этот парадокс стал известен как «проблема Монти Холла», и заключается он в следующем.

Вы участник шоу Монти Холла «Давайте совершать сделки» (Let's Make a Deal). Ведущий дает вам возможность выбрать одну из трех дверей, за одной из которых находится большой приз, за двумя другими — козы. Допустим, вы выбираете дверь № 2. Но прежде чем показать, что скрывается за этой дверью, Монти открывает дверь № 3. Там коза. Теперь в своей дразнящей манере Монти спрашивает вас: вы хотите открыть дверь № 2 или рискнете посмотреть, что находится за дверью № 1? Что вам следует сделать? Если предположить, что Монти собирается подсказать вам, где нет главного приза, то он всегда будет открывать одну из «утешительных» дверей. Это оставляет вас перед выбором: одна дверь с большим призом, а вторая — с утешительным. Сейчас ваши шансы составляют 50 на 50, не так ли?

А вот и нет! Шанс, что вы правильно выбрали в первый раз, по-прежнему 1 к 3. Вероятность того, что большой приз окажется за другой дверью, увеличивается до $2/3$, потому что вероятности в сумме должны давать 1.

Таким образом, изменив свой выбор, вы удвоите шансы на выигрыш! (В задаче предполагается, что Монти всегда будет давать игроку возможность сделать новый выбор, показывая «невыигрышную» дверь, и, когда ваш первый выбор окажется правильным, откроет «невыигрышную» дверь наугад.) Поразмышляйте об игре с десятью дверями. Пусть после вашего первого выбора ведущий откроет восемь «невыигрышных» дверей. Здесь ваши инстинкты, скорее всего, потребуют поменять дверь. Люди обычно ошибаются, думая, что если Монти Холл

не знает, где главный приз, и открывает дверь № 3, за которой оказывается коза (хотя мог бы быть и приз), то дверь № 1 с вероятностью в 50 процентов будет нужной. Такое рассуждение противоречит здравому смыслу, тем не менее Мэрилин Савант получила груды писем (многие от ученых, и даже математиков), в которых говорилось, что ей не следовало писать о математике. Конечно, все эти люди были неправы.

ВОЗВЕДЕНИЕ В КУБ

Мы закончим эту главу новым методом возведения в куб двузначных чисел. (Воскресите в памяти тот факт, что куб числа — это число, умноженное на себя дважды. Например, 5 в кубе (обозначается 5^3) будет равно $5 \times 5 \times 5 = 125$.) Как вы убедитесь, это не намного сложнее, чем умножение двузначных чисел. Метод основан на алгебраическом соотношении

$$A^3 = (A - d)A(A + d) + d^2A,$$

где d — любое число. Как и при возведении в квадрат двузначных чисел, я стараюсь выбрать такое d , чтобы при его сложении (или вычитании) получить число, как можно более близкое к кратному десяти. Например, при возведении в куб числа 13, $d = 3$, в результате получается:

$$13^3 = ((13 - 3) \times 13 \times (13 + 3)) + (3^2 \times 13).$$

Поскольку $13 \times 16 = 13 \times 4 \times 4 = 52 \times 4 = 208$ и $9 \times 13 = 117$, то мы имеем:

$$13^3 = 2080 + 117 = 2197.$$

Как насчет куба 35? Принимая $d = 5$, получим:

$$35^3 = (30 \times 35 \times 40) + (5^2 \times 35).$$

Усовершенствованные произведения: умножение среднего уровня

Так как $30 \times 35 \times 40 = 30 \times 1400 = 42\,000$ и $35 \times 5 \times 5 = 175 \times 5 = 875$, имеем

$$\mathbf{35^3 = 42\,000 + 875 = 42\,875.}$$

При возведении 49 в куб задаем $d = 1$ с целью округления этого числа до 50. Тогда

$$\mathbf{49^3 = (48 \times 49 \times 50) + (12 \times 49).}$$

Можно умножить 48×49 с помощью метода разложения, но для задач такого типа я предпочитаю метод совместной близости, который будет описан в главе 8. (Можете забежать вперед и взглянуть на него уже сейчас, если хотите!) Используя этот метод, получим $48 \times 49 = (50 \times 47) + (1 \times 2) = 2352$. Умножив это число на 50, получим 117 600 и тогда:

$$\mathbf{49^3 = 117\,600 + 49 = 117\,649.}$$

Вот задача посложнее. Попробуйте возвести в куб число 92.

$$\mathbf{92^3 = (90 \times 92 \times 94) + (2^2 \times 92)}$$

Если вы умеете быстро возводить в квадрат двузначные числа, значит, можете вычислить $92 \times 94 = 932 - 1 = 8648$, либо применить метод совместной близости, следствие которого $92 \times 94 = (90 \times 96) + (2 \times 4) = 8648$. Итак, умножим это число на 9 (как описано в начале главы 8) — $9 \times (8600 + 48) = 77\,400 + 432 = 77\,832$. Следовательно, $90 \times 92 \times 94 = 778\,320$. Далее, поскольку $4 \times 92 = 368$, прибавим его и получим окончательный ответ:

$$\mathbf{92^3 = 778\,320 + 368 = 778\,688.}$$

Отметим, что при использовании метода совместной близости для задач на умножение, возникающих при возведении в куб трехзначного числа, малое произведение, которое

нужно прибавить (в зависимости от значения $d = 1, 2, 3, 4$ или 5), будет равно $1 \times 2 = 2$; $2 \times 4 = 8$; $3 \times 6 = 18$; $4 \times 8 = 32$; $5 \times 10 = 50$.

Возведем в куб число 96.

$$96^3 = (92 \times 96 \times 100) + (4^2 \times 96)$$

Произведение $92 \times 96 = 8832$ можно посчитать разными способами. Чтобы отпраздновать окончание данной главы, применим некоторые из уже изученных нами методов. Я начну с самого, на мой взгляд, сложного, а закончу самым простым. По методу сложения $(90 + 2) \times 96 = 8640 + 192 = 8832$; по методу вычитания $92 \times (100 - 4) = 9200 - 368 = 8832$; по методу разложения $92 \times 6 \times 4 \times 4 = 552 \times 4 \times 4 = 2208 \times 4 = 8832$; по результатам возведения в квадрат $942 - 22 = 8836 - 4 = 8832$; по методу совместной близости с основанием 90: $(90 \times 98) + (2 \times 6) = 8820 + 12 = 8832$; и по методу совместной близости с основанием 100: $(100 \times 88) + (-8 \times -4) = 8800 + 32 = 8832$.

Произведение $42 \times 96 = 1536$ тоже можно вычислить несколькими способами, такими как $96 \times 4 \times 4 = 384 \times 4 = 1536$ или $16 \times (100 - 4) = 1600 - 64 = 1536$. И наконец, поскольку $8832 \times 100 = 883\,200$, получаем окончательный ответ:

$$96^3 = 883\,200 + 1\,536 = 884\,736$$

УПРАЖНЕНИЕ:

ВОЗВЕДЕНИЕ В КУБ ДВУЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

- | | | | | |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 1. 12³ | 2. 17³ | 3. 21³ | 4. 28³ | 5. 33³ |
| 6. 39³ | 7. 40³ | 7. 44³ | 7. 52³ | 10. 56³ |
| 11. 65³ | 12. 71³ | 13. 78³ | 14. 85³ | 15. 87³ |
| 16. 99³ | | | | |

Глава 4

Разделяй и властвуй: Деление в уме

Деление в уме — чрезвычайно полезный навык как для бизнеса, так и для повседневной жизни. Сколько раз в неделю вы сталкиваетесь с ситуациями, которые требуют от вас что-то равномерно распределить, например счет в ресторане? Точно такой же навык оказывается кстати, когда вы хотите выяснить стоимость одной упаковки корма для собак, или поделить выигрыш во время игры в покер, или узнать, сколько литров бензина можно купить на 20 долларов. Способность делить в уме избавит вас от необходимости постоянно обращаться к калькулятору, когда вам нужно что-либо посчитать.

При выполнении устного деления метод вычисления слева направо вступает в свои права. Именно ему нас учили в школе, так что вы будете заниматься естественным для себя делом. Помню, что, будучи ребенком, думал, будто метод деления слева направо олицетворяет то, какой арифметика должна быть в принципе. Я часто размышлял о том, что если бы в школе нашли способ преподавать и деление справа налево, они, вероятно, так бы и сделали!

ДЕЛЕНИЕ НА ОДНОЗНАЧНОЕ ЧИСЛО

Первый шаг при делении в уме — предположить, из скольких цифр будет состоять итоговый ответ. Чтобы понять, что я имею в виду, попробуйте решить вот такую задачу:

179 ÷ 7

Чтобы разделить 179 на 7, нужно найти такое число Q , которое 7 раз по Q составит 179. Очевидно, что поскольку 179 находится между $7 \times 10 = 70$ и $7 \times 100 = 700$, Q должно размещаться между 10 и 100. Стало быть, ответ является двузначным числом. Зная это, сначала определяем наибольшее кратное 10, которое может быть умножено на 7 и в итоге оказаться меньше 179. Нам известно, что $7 \times 20 = 140$ и $7 \times 30 = 210$, значит, ответ будет в диапазоне «20 плюс». Отталкиваясь от этого, мы уже можем реально проговорить число «20», так как это будет часть ответа, и она точно не изменится. Далее вычитаем $179 - 140 = 39$. Теперь наша задача сведена к делению $39 \div 7$. Так как $7 \times 5 = 35$, что на 4 меньше 39, у нас появилась вторая часть ответа «5» с остатком 4, или, если вы предпочитаете говорить так: 25 и $4/7$. Вот как выглядит данный процесс деления*.

$$\begin{array}{r}
 25 \\
 7 \overline{)179} \\
 \underline{-140} \\
 39 \\
 \underline{-35} \\
 4 \leftarrow \text{остаток}
 \end{array}$$

Ответ: 25 (остаток 4), или 25 (и $4/7$).

Попробуем решить похожую задачу, используя аналогичные расчеты.

675 ÷ 8

* Автор использует американскую нотацию для деления в столбик. В этой нотации сначала записывается делитель (число 7 в примере ниже), рядом делимое (число 179). Цифры ответа поочередно записываются над делимым. Число под делимым — это произведение делителя и первой цифры ответа (с соответствующим количеством нулей). Затем из разности делимого и этого числа вычитается произведение делителя и следующей цифры ответа, и так далее.

Как и раньше, если 675 находится между $8 \times 10 = 80$ и $8 \times 100 = 800$, то ответ должен быть меньше 100 и выражаться двузначным числом. Чтобы произвести деление, учтем, что $8 \times 80 = 640$ и $8 \times 90 = 720$. То есть ответ должен быть в диапазоне 80 «с хвостиком». Но с каким хвостиком? Чтобы это узнать, вычтите 640 из 675 для получения остатка 35. После произнесения вами «80» наша задача сведется к $35 \div 8$. Так как $8 \times 4 = 32$, итоговый ответ будет 84 с остатком 3, или 84 и $3/8$. Схематически данный пример представим так:

$$\begin{array}{r}
 84 \\
 8 \overline{)675} \\
 \underline{- 640} \\
 35 \\
 \underline{- 32} \\
 3 \leftarrow \text{остаток}
 \end{array}$$

Ответ: 84 (остаток 3), или 84 (и $3/8$).

Как и большинство устных вычислений, процесс деления можно рассматривать как процесс упрощения. Чем больше числа в первом действии, тем проще становится задача. То, что начиналось как $675 \div 8$, было сведено к меньшей задаче $35 \div 8$.

Теперь рассмотрим пример, при решении которого получается трехзначное число.

$$947 \div 4$$

На этот раз ответ будет содержать три цифры, потому что 947 находится между $4 \times 100 = 400$ и $4 \times 1000 = 4000$. Нам следует отыскать наибольшее кратное 100, наиболее близкое к 947. Поскольку $4 \times 200 = 800$, то есть «200 плюс», так что вперед, произнесите это! Вычитание 800 из 947 преподносит новую задачу на деление $147 \div 4$. Так как $4 \times 30 = 120$, теперь мы уже

можем сказать: «30». После вычитания 120 из 147 вычисляем $27 \div 4$ для получения остальной части ответа: 6 с остатком 3. В совокупности имеем 236 с остатком 3, или 236 и $3/4$.

$$\begin{array}{r}
 236 \\
 4 \overline{)947} \\
 \underline{- 800} \\
 147 \\
 \underline{- 120} \\
 27 \\
 \underline{- 24} \\
 3 \quad \leftarrow \text{остаток}
 \end{array}$$

Ответ: 236 (остаток 3), или 236 (и $3/8$).

Процесс деления четырехзначного числа на одну цифру столь же прост, как и следующий пример.

$$2196 \div 5$$

Здесь ответ будет исчисляться сотнями, потому что 2196 находится между $5 \times 100 = 500$ и $5 \times 1000 = 5000$. После вычитания $5 \times 400 = 2000$ из 2196 мы можем произнести «400», и наша задача сведется к делению 196 на 5, что вычисляется так же, как и в предыдущих примерах.

$$\begin{array}{r}
 439 \\
 5 \overline{)2196} \\
 \underline{- 2000} \\
 196 \\
 \underline{- 150} \\
 46 \\
 \underline{- 45} \\
 1 \quad \leftarrow \text{остаток}
 \end{array}$$

Ответ: 439 (остаток 1), или 439 (и $1/5$).

На самом деле существует более простой способ решения последней задачи. Ее можно упростить путем удвоения обоих чисел. Так как $2196 \times 2 = 4392$, то имеем $2196 \div 5 = 4392 \div 10 = 439,2$, или 439 и $2/10$. Мы рассмотрим другие способы упрощения при делении в следующем разделе.

УПРАЖНЕНИЕ: ДЕЛЕНИЕ НА ОДНУ ЦИФРУ

1. **$318 \div 9$**
2. **$726 \div 5$**
3. **$428 \div 7$**
4. **$289 \div 8$**
5. **$1328 \div 3$**
6. **$2782 \div 4$**

ПРАВИЛО БОЛЬШОГО ПАЛЬЦА

При делении в уме запоминание частей ответа может вызвать сложности в процессе вычислений. Одним из вариантов выхода из ситуации является, как мы практиковали ранее, проговаривание ответа вслух по ходу решения. Но для создания большего эффекта вы можете предпочесть (как и я) держать ответ в памяти с помощью пальцев и произносить его целиком в самом конце. Однако при этом вы рискуете столкнуться с проблемой при запоминании чисел, которые больше пяти, ведь у нас лишь пять пальцев на каждой руке. В этом вам поможет специальная техника, в основе которой лежит язык жестов. Я называю ее «Правило большого пальца». Она особенно эффективна для запоминания чисел, состоящих из трех и более цифр, и полезна не только в данной главе, но пригодится и в последующих, где придется иметь дело с задачами посложнее и числами подлиннее.

Вы уже догадались, что для запоминания чисел от 0 до 5 вам достаточно согнуть нужное количество пальцев на руке. Когда

в процесс вовлечен большой палец, будет легко запомнить числа от 6 до 9. Вот список правил большого пальца.

- Чтобы задать 6, поместите большой палец на верхней части мизинца.
- Чтобы задать 7, поместите большой палец на верхней части безымянного пальца.
- Чтобы задать 8, поместите большой палец на верхней части среднего пальца.
- Чтобы задать 9, поместите большой палец на верхней части указательного пальца.

При работе с трехзначным числом задайте цифры для сотен на левой руке и для десятков на правой. Когда дело дойдет до одной цифры, вы достигнете конечной точки решения (за исключением возможного остатка). Теперь произнесите число на левой руке, число на правой руке, последнюю цифру, которую только что посчитали, и остаток (что у вас в голове). И вот! Вы произнесли ответ!

Чтобы попрактиковаться, попробуйте решить следующую задачу на деление четырехзначного числа.

$$4579 \div 6$$

$$\begin{array}{r}
 763 \\
 6 \overline{)4579} \\
 \underline{- 4200} \\
 379 \\
 \underline{- 360} \\
 19 \\
 \underline{- 18} \\
 1 \leftarrow \text{остаток}
 \end{array}$$

Ответ: 763 (остаток 1), или 763 (и 1/6).

Пользуясь приемом большого пальца для запоминания ответа, вы зададите 7 на левой руке, соединив большой палец с безымянным, и 6 на правой, соединив большой палец с мизинцем. Как только вычислите последнюю цифру (она равна 3) и остаток (равный 1), можете «зачитать» итоговый ответ с ваших рук слева направо: «семь...шесть...три с остатком один».

Некоторые задачи на деление четырехзначных чисел дают четырехзначный ответ. В таком случае, поскольку у вас только две руки, вам придется вслух произнести цифру для тысячи и использовать правило большого пальца для запоминания остального ответа. Например:

$$\begin{array}{r} 8352 \div 3 \\ \underline{2784} \\ 3)8352 \\ \underline{- 6000} \\ 2352 \\ \underline{- 2100} \\ 252 \\ \underline{- 240} \\ 12 \\ \underline{- 12} \\ 0 \end{array}$$

Ответ: 2784.

Для решения этой задачи вы делите 8 на 3, чтобы получить цифру 2 для тысяч; произносите «две тысячи» вслух, затем делите 2352 на 3 привычным способом.

ДЕЛЕНИЕ НА ДВУЗНАЧНЫЕ ЧИСЛА

В этом разделе мы исходим из предположения, что вы уже освоили искусство деления на однозначные числа. Естественно, задачи на деление с увеличением делителя более сложные. К счастью, в моем рукаве есть немного магии, чтобы облегчить вам жизнь.

Начнем с относительно простой задачи.

$$597 \div 14$$

Так как 597 находится между 14×10 и 14×100 , ответ (так называемое частное) лежит между 10 и 100. Чтобы его найти, нужно в первую очередь задать вопрос: «Сколько раз по 14 даст в сумме 590?» Умножив $14 \times 40 = 560$, вы узнаете, что ответ будет в диапазоне «40 плюс»; так что можно смело произнести вслух «сорок».

Далее вычитаем 560 из 597 и получаем 37, что сводит задачу к делению 37 на 14. Так как $14 \times 2 = 28$, здесь ответ — 42. Вычитая 28 из 37, мы получаем остаток 9. Процесс решения задачи показан следующим образом.

$$\begin{array}{r}
 42 \\
 14 \overline{)597} \\
 \underline{- 560} \\
 37 \\
 \underline{- 28} \\
 9 \quad \leftarrow \text{остаток}
 \end{array}$$

Ответ: 42 (остаток 9), или 42 (и 9/14).

Следующая задачка немного сложнее, потому что делитель в ней больше.

$$682 \div 23$$

В данном примере ответ будет двузначным числом, так как 682 находится между $23 \times 10 = 230$ и $23 \times 100 = 2300$. Чтобы найти цифру для десятка двузначного числа, нужно подумать: «Сколько раз по 23 даст в сумме 680?» Если вы попробуете 30, то увидите, что здесь незначительный перебор, так как $23 \times 30 = 690$. Но теперь вы знаете, что ответ лежит в диапазоне «20 плюс» и можете произнести это вслух. Затем вычтите $23 \times 20 = 460$ из 682, чтобы получить 222. Так как $23 \times 9 = 207$, ответ — 29 и остаток $222 - 207 = 15$.

$$\begin{array}{r}
 29 \\
 23 \overline{)682} \\
 \underline{- 460} \\
 222 \\
 \underline{- 207} \\
 15 \leftarrow \text{остаток}
 \end{array}$$

Ответ: 29 (остаток) 9, или 29 (и 15/23).

Теперь вычислим:

$$491 \div 62$$

Так как 491 меньше, чем $62 \times 10 = 620$, ответ будет представлен одной цифрой с остатком. Можно попробовать 8, но $62 \times 8 = 496$, а это несколько больше делимого. Поскольку $62 \times 7 = 434$, ответ — 7 и остаток $491 - 434 = 57$, или 7 и 57/62.

$$\begin{array}{r}
 7 \\
 62 \overline{)491} \\
 \underline{- 434} \\
 57 \leftarrow \text{остаток}
 \end{array}$$

Ответ: 7 (остаток 57), или 7 (и 57/62).

Один отличный трюк может облегчить решение таких задач. Помните, как сначала мы пытались перемножить $62 \times 8 = 496$, но обнаружили, что это число больше, чем нужно? Но это действие оказалось не напрасным. Помимо информации о том, что ответ — 7, оно также позволяет сразу определить остаток. Поскольку 496 на 5 единиц больше 491, остаток будет на 5 единиц меньше делителя 62. Поскольку $62 - 5 = 57$, то ответ — 7 и $57/62$. Этот прием работает потому, что $491 = (62 \times 8) - 5 = 62 \times (7 + 1) - 5 = (62 \times 7 + 62) - 5 = (62 \times 7) + (62 - 5) = 62 \times 7 + 57$.

Теперь попробуйте решить пример $380 \div 39$, используя вышеописанную уловку. Итак, $39 \times 10 = 390$, что больше делимого на 10. Стало быть, ответ будет 9 с остатком $39 - 10 = 29$.

Следующий вызов для вас — деление четырехзначного числа на двузначное.

3657 ÷ 54

Так как $54 \times 100 = 5400$, то ответ будет двузначным числом. Для получения первой цифры ответа необходимо выяснить, сколько раз по 54 даст в сумме 3657. Исходя из того что $54 \times 70 = 3789$ (что немного больше делимого), ответ будет где-то в диапазоне «60 плюс».

Далее умножаем $54 \times 60 = 3240$ и вычитаем $3657 - 3240 = 417$. Как только вы произнесете «60», ваша задача упростится до $417 \div 54$. Поскольку $54 \times 8 = 432$ (что тоже немного больше 417), последняя цифра будет 7 с остатком $54 - 15 = 39$.

$$\begin{array}{r}
 67 \\
 54 \overline{)3657} \\
 \underline{- 3240} \\
 417 \\
 \underline{- 379} \\
 39 \leftarrow \text{остаток}
 \end{array}$$

Ответ: 67 (остаток 39), или 67 (и 39/54).

Теперь попробуйте свои силы в решении задачи с трехзначным частным:

$$9467 \div 13$$

$$\begin{array}{r}
 728 \\
 13 \overline{)9467} \\
 \underline{- 9100} \\
 367 \\
 \underline{- 260} \\
 107 \\
 \underline{- 104} \\
 3 \leftarrow \text{остаток}
 \end{array}$$

Ответ: 728 (остаток 3), или 728 (и 3/13).

Упрощение задач на деление

Если к этому моменту ваш мозг уже устал от перенапряжения, расслабьтесь. Как и было обещано, я поделюсь с вами несколькими приемами упрощения задач на деление в уме. Они основаны на принципе деления обеих частей задачи на общий множитель. Если оба числа в примере четные, вы можете вдвойне упростить проблему путем деления каждого числа на 2 перед началом вычислений. Например, задача $858 \div 16$ содержит два четных числа, и их деление на 2 ведет к значительно более простому действию $429 \div 8$.

$$\begin{array}{r}
 53 \\
 16 \overline{)858} \\
 \underline{- 800} \\
 58 \\
 \underline{- 48} \\
 10
 \end{array}$$

Ответ: 53 (и 10/16).

делим на 2

$$\begin{array}{r}
 53 \\
 8 \overline{)429} \\
 \underline{- 400} \\
 29 \\
 \underline{- 24} \\
 5
 \end{array}$$

Ответ: 53 (и 5/8).

Как видите, остатки 10 и 5 различны; но если записать их в виде дроби, получится $10/16$, что равно $5/8$. Поэтому в данном методе ответ всегда должен быть представлен в виде дроби.

Мы проделали оба типа вычислений для того, чтобы вы убедились, насколько второй способ легче. Теперь ваша очередь практиковаться:

$$3618 \div 54$$

$$\begin{array}{r} 67 \\ 54 \overline{)3618} \\ \underline{- 3240} \\ 378 \\ \underline{- 378} \\ 0 \end{array}$$

Делим на 2

$$\begin{array}{r} 67 \\ 27 \overline{)1809} \\ \underline{- 1620} \\ 189 \\ \underline{- 189} \\ 0 \end{array}$$

Ответ: 67.

Ответ: 67.

Пример справа гораздо легче решить в уме. Если вы все еще в этом не уверены, можете разделить обе части исходной задачи на 18 для получения еще более простой задачи: $201 \div 3 = 67$.

Высматривайте задачи, которые можно подвергнуть делению на 2 дважды, такие как $1652 \div 36$.

$$1652 \div 36 = 826 \div 18 = 413 \div 9 = 9 \overline{)413} \begin{array}{r} 45 \\ \underline{- 360} \\ 53 \\ \underline{- 45} \\ 8 \end{array}$$

Ответ: 45 (и 8/9).

Разделяй и властвуй: деление в уме

Мне кажется, что проще дважды разделить числа на 2, чем делить каждое из чисел на 4. Теперь рассмотрим случай, когда оба числа оканчиваются на 0. В этой ситуации можно каждое число разделить на 10.

$$\begin{array}{r} 580 \div 70 = 58 \div 7 = 7 \overline{)58} \\ \div 10 \qquad \qquad \underline{-56} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 2 \end{array}$$

Ответ: 8 (и 2/7).

Если оба числа заканчиваются на 5, удвойте их, а затем разделите на 10 для упрощения задачи. Например:

$$\begin{array}{r} 475 \div 35 = 950 \div 70 = 95 \div 7 = 7 \overline{)95} \\ \times 2 \qquad \qquad \div 10 \qquad \qquad \underline{-70} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{25} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{-21} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 4 \end{array}$$

Ответ: 13 (и 4/7).

Наконец, если делитель оканчивается на 5, а делимое на 0, умножьте оба на 2, а затем разделите на 10 и далее действуйте так, как мы делали выше.

$$\begin{array}{r} 890 \div 45 = 1780 \div 90 = 178 \div 9 = 9 \overline{)178} \\ \times 2 \qquad \qquad \div 10 \qquad \qquad \underline{-90} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{88} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{-81} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 7 \end{array}$$

Ответ: 19 (и 7/9).

УПРАЖНЕНИЕ: ДЕЛЕНИЕ НА ДВУЗНАЧНЫЕ ЧИСЛА

Здесь вы найдете разнообразные задачи по делению на двузначные числа, которые проверят ваше ментальное мастерство и умение пользоваться простыми техниками упрощения, которые были объяснены в этой главе. Загляните в конец книги для получения объяснений и сверки ответов.

1. $738 \div 17$ 2. $591 \div 24$ 3. $321 \div 79$

4. $4268 \div 28$ 5. $7214 \div 11$ 6. $3074 \div 18$

РАЗВИВАЕМ СВОИ СПОСОБНОСТИ: ИЗУЧЕНИЕ ДЕСЯТИЧНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Как вы уже, наверное, догадались, мне нравится заниматься магией, превращая обычные дроби в десятичные. В случае с дробями, в знаменателе которых есть только одна цифра, лучший способ превратить их в десятичные — это почерпнуть их значения из памяти. Это не так сложно, как кажется. Далее вы увидите, что большинство дробей, числители и знаменатели которых представлены однозначными числами (а также 10 или 11), обладают особыми свойствами, поэтому их сложно забыть. Каждый раз, когда вы можете сократить дробь до уже известного вам значения, это ускорит процесс вычислений.

Уверен, вы уже знаете десятичные эквиваленты для следующих дробей:

$$\frac{1}{2} = 0,50; \quad \frac{1}{3} = 0,333...; \quad \frac{2}{3} = 0,666... .$$

Подобно этому

$$\frac{1}{4} = 0,25; \quad \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,50; \quad \frac{3}{4} = 0,75.$$

Дроби с пятерками в знаменателе запомнить легче всего.

$$\frac{1}{5} = 0,20; \quad \frac{2}{5} = 0,40; \quad \frac{3}{5} = 0,60; \quad \frac{4}{5} = 0,80.$$

Дроби с шестерками в знаменателе требуют запоминания только двух новых значений.

$$\frac{1}{6} = 0,1666...; \quad \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0,333...; \quad \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,50;$$

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0,666...; \quad \frac{5}{6} = 0,8333... .$$

Через мгновение я вернусь к дробям с семерками в знаменателе. А сейчас дроби с восьмерками в знаменателе, преобразовать которые просто элементарно.

$$\frac{1}{8} = 0,125; \quad \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25;$$

$$\frac{3}{8} = 0,375 \left(3 \times \frac{1}{8} = 3 \times 0,125 = 0,375 \right); \quad \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0,50;$$

$$\frac{5}{8} = 0,625 \left(5 \times \frac{1}{8} = 5 \times 0,125 = 0,625 \right); \quad \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0,75;$$

Дроби с девятками в знаменателе таят в себе особое волшебство.

$$\frac{1}{9} = 0,\bar{1}; \quad \frac{2}{9} = 0,\bar{2}; \quad \frac{3}{9} = 0,\bar{3}; \quad \frac{4}{9} = 0,\bar{4};$$

$$\frac{5}{9} = 0,\bar{5}; \quad \frac{6}{9} = 0,\bar{6}; \quad \frac{7}{9} = 0,\bar{7}; \quad \frac{8}{9} = 0,\bar{8}.$$

где черта над цифрой обозначает бесконечное повторение этой цифры (говорят, что это дробь в периоде). Например, $4/9 = 0,444\dots$

Дроби с десятками в знаменателе нам уже известны.

$$\frac{1}{10} = 0,1; \quad \frac{2}{10} = 0,2; \quad \frac{3}{10} = 0,3;$$

$$\frac{4}{10} = 0,4; \quad \frac{5}{10} = 0,5; \quad \frac{6}{10} = 0,6;$$

$$\frac{7}{10} = 0,7; \quad \frac{8}{10} = 0,8; \quad \frac{9}{10} = 0,9.$$

Дроби со знаменателем 11 легко вычисляются, если вы запомните, что $1/11 = 0,0909$.

$$\frac{1}{11} = 0,\overline{09} = 0,0909\dots; \quad \frac{2}{11} = 0,\overline{18} = (2 \times 0,0909);$$

$$\frac{3}{11} = 0,\overline{27} = (3 \times 0,0909); \quad \frac{4}{11} = 0,\overline{36}; \quad \frac{5}{11} = 0,\overline{45};$$

$$\frac{6}{11} = 0,\overline{54}; \quad \frac{7}{11} = 0,\overline{63}; \quad \frac{8}{11} = 0,\overline{72};$$

$$\frac{9}{11} = 0,\overline{81}; \quad \frac{10}{11} = 0,\overline{90}.$$

Дроби со знаменателем 7 действительно выдающиеся. Как только вы запомните, что $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$, то сможете без труда получить значения других дробей с 7 в знаменателе.

$$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}; \quad \frac{2}{7} = 0,\overline{285714}; \quad \frac{3}{7} = 0,\overline{428571};$$

$$\frac{4}{7} = 0,\overline{571428}; \quad \frac{5}{7} = 0,\overline{714285}; \quad \frac{6}{7} = 0,\overline{857142}.$$

Обратите внимание, что последовательность цифр в периоде циклически повторяется в каждой дроби, при этом изменяется лишь начальная цифра последовательности. Ее можно определить путем умножения 0,14 на числитель дроби. Например, для дроби $2/7$ имеем $2 \times 0,14 = 0,28$. Поэтому последовательность должна начинаться с 2. Для дроби $3/7$ это $3 \times 0,14 = 0,42$, значит, последовательность начинается с 4. Другие дроби подчиняются тому же правилу.

Конечно, в процессе решения разнообразных задач вы обязательно столкнетесь с дробями, превышающими $10/11$. Поэтому постоянно обдумывайте способы упрощения таких задач. Например, можно упростить дробь $18/34$ путем деления числителя и знаменателя на 2, чтобы сократить задачу до $9/17$ (ее будет легче решить).

Если знаменатель дроби — четное число, можно упростить дробь, уменьшив ее вдвое, даже если числитель нечетный. Например,

$$\frac{9}{14} = \frac{4,5}{7}$$

Деление числителя и знаменателя на 2 сведет проблему к дроби с семеркой в знаменателе. Хотя ранее показанная последовательность дробей не предоставляет десятичного варианта для дроби $4,5/7$, как только вы начнете считать, заученное число неожиданно всплывет в памяти.

$$\begin{array}{r} \mathbf{0,6428571} \\ \mathbf{7)4,5000000} \\ \underline{4,2} \\ \mathbf{3} \end{array}$$

Как видите, вам не пришлось решать задачу целиком. Стоит вам разделить 3 на 7, и вы точно произведете огромное

впечатление на публику, отбарабанив этот длинный набор цифр почти мгновенно!*

Когда делитель заканчивается на 5, то почти всегда умножение на 2, а потом деление на 10 оправдывает себя. Например:

$$\frac{29}{45} = \frac{58}{90} = \frac{5,8}{9} = 0,6\overline{44}.$$

× 2 ÷ 10

Числа, которые заканчиваются на 25 или 75, надо сначала умножить на 4 и затем разделить на 100.

$$\frac{31}{25} = \frac{124}{100} = 1,24$$

× 4 ÷ 100

$$\frac{62}{75} = \frac{248}{300} = \frac{2,48}{3} = 0,82\overline{66}.$$

× 4 ÷ 100

Этот трюк можно применять даже в середине расчетов. Если вам нужно вычислить дробь 3/16, произойдет вот что:

$$\begin{array}{r} 0,1 \\ 16 \overline{) 3,000} \\ \underline{- 16} \\ 14 \end{array}$$

Как только задача сведется к вычислению 14/16, можно привести ее к виду 7/8, что, как известно, равняется 0,875. Отсюда 3/16 = 0,1875**.

* Вычисления происходят следующим образом: 4,5/7 = 4,2/7 + 0,3/7 = = 0,6 + 0,1 x 3/7 = 0,6 + 0,1 x 0,428571 = 0,6 + 0,0428571 = 0,6428571. *Прим. ред.*

** Здесь вычисления вновь требуют пояснений: 3/16 = 0,1 x 30/16 = = 0,1 x 15/8 = 0,1 x (1 + 7/8) = 0,1 + 0,1 x 7/8 = 0,1 + 0,1 x 0,875 = 0,1 + + 0,0875 = 0,1875. *Прим. ред.*

УПРАЖНЕНИЕ:
ПРИВЕДЕНИЕ ДРОБЕЙ К ДЕСЯТИЧНОЙ ФОРМЕ

Чтобы решить следующие задачи, не забудьте использовать полученные знания о десятичном виде различных «одноцифровых» дробей. Везде, где это целесообразно, упрощайте дроби, прежде чем преобразовать их в десятичные.

1. **2/5** 2. **4/7** 3. **3/8** 4. **9/12** 5. **5/12** 6. **6/11**
7. **14/24** 8. **13/27** 9. **18/48** 10. **10/14** 11. **6/32** 12. **19/45**

ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ

В последнем разделе мы узнали, как упростить задачи на деление, если числитель и знаменатель поделить на общий множитель. В завершение этой главы обсудим, как определить, является ли одно число делителем другого. Это поможет упростить задачу на деление и ускорить процесс решения многих задач на умножение, а также пригодится, когда мы доберемся до продвинутого умножения, где часто придется искать способы разложить на множители двух-, трех- или даже пятизначные числа. Умение делать это окажется весьма полезным.

Проверить, делится ли число на 2, довольно просто. Вам нужно только определить, является ли последняя цифра четной. Если это 2, 4, 6, 8 или 0, то число целиком делится на 2.

Чтобы протестировать число на делимость на 4, проверьте, делятся ли на 4 две его последние цифры. Число 57 852 кратно 4, потому что $52 = 13 \times 4$. Число 69 346 не кратно 4, поскольку 46 не делится на 4 без остатка. Это правило работает потому, что 4 делит 100 и, следовательно, любое число, кратное 100.

Таким образом, поскольку 57 800 и 52 делятся на 4, то 4 делит и их сумму, то есть 57 852.

Аналогично, так как 1000 делится на 8, для проверки кратности 8 достаточно выяснить, делятся ли на 8 последние три цифры числа. Например, для 14 918 надо проверить число 918 на делимость на 8. Однако при делении 918 на 8 имеем остаток ($918 \div 8 = 114 \text{ } 6/8$), из чего делаем вывод, что число 14 918 на 8 не делится. Можно также заметить, что 18 (две последние цифры числа 14 918) не делится на 4, а так как 14 918 не делится на 4, оно не может делиться и на 8.

Когда дело доходит до делимости на 3, предлагаю запомнить одно простое правило: число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма составляющих его цифр делится на 3 (независимо от того, сколько цифр в числе). Чтобы выяснить, делится ли 57 852 на 3, просто сложите $5 + 7 + 8 + 5 + 2 = 27$. Так как 27 кратно 3, то и 57 852 будет кратно 3. Столь же удивительное правило справедливо и для делимости на 9. Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма составляющих его цифр кратна 9. Поэтому 57 852 кратно 9, тогда как число 31 416, сумма цифр которого равна 15, на 9 не делится. Объясняется это правило тем, что числа 1, 10, 100, 1000, 10000 и т. д. всегда на единицу больше кратного 9.

Число делится на 6 только в том случае, если оно четное и делится на 3. Так что кратность 6 легко проверить.

Установить, делится ли число на 5, еще проще. Любое число, независимо от величины, кратно 5 тогда и только тогда, когда оно заканчивается на 5 или 0.

Выяснить делимость на 11 почти так же просто, как на 3 или на 9. Число делится на 11 тогда и только тогда, когда в результате попеременного вычитания и сложения составляющих его цифр вы получите либо 0, либо кратное 11.

Например, 73 958 не делится на 11, потому что $7 - 3 + 9 - 5 + 8 = 16$. Однако числа 8 492 и 73 194 кратны 11, так как $8 - 4 + 9 - 2 = 11$ и $7 - 3 + 1 - 9 + 4 = 0$. Это правило работает потому, что числа 1, 100, 10 000, 1 000 000 на единицу больше кратно 11, в то время как числа 10, 1000, 100 000 и т. д. на единицу меньше величины, кратной 11.

Проверка делимости на 7 несколько сложнее. Если вы прибавите (или вычтите) число, кратное 7, к проверяемому (или из проверяемого) и полученный результат будет делиться на 7, ответ положительный. Я всегда выбираю такое прибавляемое или вычитаемое кратное 7, чтобы в итоге сумма или разность заканчивалась на 0. Например, для проверки числа 5292 я вычитаю 42 (кратное 7), чтобы получить 5250. Далее избавляюсь от 0 на конце (так как деление на десять не влияет на проверку делимости на семь), получая в итоге 525. Затем повторяю процесс, прибавляя 35 (кратное 7), что дает мне 560. Когда я удалю 0, то останусь с числом 56, которое, как мне известно, кратно 7. Таким образом, исходное число 5292 делится на 7.

Этот метод работает не только для 7, но и для любого нечетного числа, кроме оканчивающегося на 5. Например, чтобы проверить, делится ли 8792 на 13, вычитаем $4 \times 13 = 52$ из 8792 и получаем 8740. Опуская 0, имеем 874. Затем прибавляем $2 \times 13 = 26$, выходит 900. Удаление двух нулей оставляет нас с числом 9, которое, очевидно, не кратно 13. Таким образом, 8792 не делится на 13.

УПРАЖНЕНИЕ: ПРОВЕРКА НА ДЕЛИМОСТЬ

В этом упражнении будьте особенно внимательны при проверке делимости на 7 и 17. Остальное не должно представлять для вас трудностей.

Делимость на 2

1. **53 428** 2. **293** 3. **7241** 4. **9846**

Делимость на 4

5. **3932** 6. **67 348** 7. **358** 8. **57 929**

Делимость на 8

9. **59 366** 10. **73 488** 11. **248** 12. **6111**

Делимость на 3

13. **83 671** 14. **94 737** 15. **7359** 16. **3 267 486**

Делимость на 6

17. **5334** 18. **67 386** 19. **248** 20. **5991**

Делимость на 9

21. **1234** 22. **8469** 23. **4 425 575** 24. **314 159 265**

Делимость на 5

25. **47 830** 26. **43 762** 27. **56 785** 28. **37 210**

Делимость на 11

29. **53 867** 30. **4969** 31. **3828** 32. **941 369**

Делимость на 7

33. **5784** 34. **7336** 35. **875** 36. **1183**

Делимость на 17

37. **694** 38. **629** 39. **8273** 40. **13 855**

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ

Если вы в состоянии управиться с целыми числами, то арифметические действия с дробями покажутся вам почти такими же легкими. В этом разделе мы сделаем обзор основных методов сложения, вычитания, умножения, деления и сокращения обыкновенных дробей. Те, кто знаком с дробями, могут спокойно его пропустить.

Умножение обыкновенных дробей

Чтобы перемножить две обыкновенные дроби, нужно просто перемножить их числители (верхние числа), а затем знаменатели (нижние числа). Например:

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}; \quad \frac{1}{2} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{18}.$$

Что может быть проще! Попробуйте следующие упражнения, прежде чем двигаться дальше.

УПРАЖНЕНИЕ: УМНОЖЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ

$$1. \quad \frac{3}{5} \times \frac{2}{7} \quad 2. \quad \frac{4}{9} \times \frac{11}{7} \quad 3. \quad \frac{6}{7} \times \frac{3}{4} \quad 4. \quad \frac{9}{10} \times \frac{7}{8}$$

Деление обыкновенных дробей

Деление дробей столь же легкое, как и умножение. Однако оно требует одного дополнительного действия. Сначала переверните вторую дробь с ног на голову (это называется обратная дробь), а затем умножайте. Например, обратная дробь для $4/5$ будет $5/4$. Следовательно,

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12}.$$

$$\frac{1}{2} \div \frac{5}{9} = \frac{1}{2} \times \frac{9}{5} = \frac{9}{10}.$$

УПРАЖНЕНИЕ: ДЕЛЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ

Теперь ваша очередь. Поделите эти дроби.

$$1. \quad \frac{2}{5} \div \frac{1}{2} \qquad 2. \quad \frac{1}{3} \div \frac{6}{5} \qquad 3. \quad \frac{2}{5} \div \frac{3}{5}$$

Сокращение обыкновенных дробей

Дроби можно рассматривать как маленькие задачки на деление. Например, $6/3$ то же самое, что и $6 \div 3 = 2$. Дробь $1/4$ то же самое, что и $1 \div 4$ (или $0,25$ в десятичной форме). Известно, что если умножить любое число на 1 , то это число не изменится. Например, $3/5 = 3/5 \times 1$. Но если заменить 1 дробью $2/2$, то получим $3/5 = 3/5 \times 1 = 3/5 \times 2/2 = 6/10$. Следовательно, $3/5 = 6/10$. По такому же принципу, заменив 1 дробью $3/3$, получим $3/5 = 3/5 \times 3/3 = 9/15$. Другими словами, если мы *умножаем* числитель и знаменатель на одно и то же число, то получаем дробь, равную исходной.

Вот еще пример:

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{5} = \frac{10}{15}.$$

Верно и то, что, *деля* числитель и знаменатель на одинаковое число, мы получаем дробь, равную исходной.

Например:

$$\frac{4}{6} = \frac{4}{6} \div \frac{2}{2} = \frac{2}{3}.$$

$$\frac{25}{35} = \frac{25}{35} \div \frac{5}{5} = \frac{5}{7}.$$

Это *сокращение* дроби.

УПРАЖНЕНИЕ: СОКРАЩЕНИЕ ДРОБЕЙ

Найдите дробь со знаменателем 12, равную дробям, представленным ниже.

1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{5}{6}$ 3. $\frac{3}{4}$ 4. $\frac{5}{2}$

Сокращение дробей.

5. $\frac{8}{10}$ 6. $\frac{6}{15}$ 7. $\frac{24}{36}$ 8. $\frac{20}{36}$

Сложение дробей

Это действие можно считать простым, когда знаменатели равны. В этом случае складываются числители и сохраняется прежний знаменатель.

Например:

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}; \quad \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}.$$

Иногда можно упростить ответ. Например:

$$\frac{1}{8} + \frac{5}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

**УПРАЖНЕНИЕ:
СЛОЖЕНИЕ ДРОБЕЙ (С РАВНЫМИ ЗНАМЕНАТЕЛЯМИ)**

1. $\frac{2}{9} + \frac{5}{9}$ 2. $\frac{5}{12} + \frac{4}{12}$ 3. $\frac{5}{18} + \frac{6}{18}$ 4. $\frac{3}{10} + \frac{3}{10}$

Более коварный случай — различные знаменатели. Когда знаменатели не равны, нужно заменить исходные дроби дробями с равными знаменателями.

Например, сложите

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{15}.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{3} = \frac{5}{15}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{15} = \frac{5}{15} + \frac{2}{15} = \frac{7}{15}.$$

При сложении

$$\frac{1}{2} + \frac{7}{8}.$$

Замечаем, что

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{8}.$$

Тогда

$$\frac{1}{2} + \frac{7}{8} = \frac{4}{8} + \frac{7}{8} = \frac{11}{8}.$$

При сложении

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5}.$$

Видим, что

$$\frac{1}{3} = \frac{5}{15} \quad \text{и} \quad \frac{2}{5} = \frac{6}{15}.$$

В итоге

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15}.$$

**УПРАЖНЕНИЕ:
СЛОЖЕНИЕ ДРОБЕЙ (С НЕРАВНЫМИ ЗНАМЕНАТЕЛЯМИ)**

1. $\frac{1}{5} + \frac{1}{10}$ 2. $\frac{1}{6} + \frac{5}{18}$ 3. $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ 4. $\frac{2}{7} + \frac{5}{21}$

5. $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ 6. $\frac{3}{7} + \frac{3}{5}$ 7. $\frac{2}{11} + \frac{5}{9}$

Вычитание дробей

Вычитание дробей похоже на их сложение. Мы покажем это действие на примерах и обеспечим вас тренировочными упражнениями.

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}; \quad \frac{4}{7} - \frac{2}{7} = \frac{2}{7}; \quad \frac{5}{8} - \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{15} = \frac{5}{15} - \frac{2}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5};$$

$$\frac{7}{8} - \frac{1}{2} = \frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8};$$

$$\frac{1}{2} - \frac{7}{8} = \frac{4}{8} - \frac{7}{8} = \frac{-3}{8}; \quad \frac{2}{7} - \frac{1}{4} = \frac{8}{28} - \frac{7}{28} = \frac{1}{28};$$

$$\frac{2}{3} - \frac{5}{8} = \frac{16}{24} - \frac{15}{24} = \frac{1}{24}.$$

УПРАЖНЕНИЕ: ВЫЧИТАНИЕ ДРОБЕЙ

1. $\frac{8}{11} - \frac{3}{11}$ 2. $\frac{12}{7} - \frac{8}{7}$ 3. $\frac{13}{18} - \frac{5}{18}$

4. $\frac{4}{5} - \frac{1}{15}$ 5. $\frac{9}{10} - \frac{3}{5}$ 6. $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$

7. $\frac{7}{8} - \frac{1}{16}$ 8. $\frac{4}{7} - \frac{2}{5}$ 9. $\frac{8}{9} - \frac{1}{2}$

Глава 5

Искусство приближенной оценки

До сих пор вы совершенствовали ментальные техники, необходимые для получения точных ответов в математических задачах. Однако часто бывает достаточно приблизительной оценки решения. Скажем, вы получаете расценки различных кредиторов рефинансирования кредита за ваш дом. Все, что вам действительно понадобится на данном этапе сбора информации, — это приблизительно оценить размер ежемесячного платежа. Или, скажем, вы оплачиваете счет в ресторане вместе с компанией друзей и не хотите вычислять в нем долю каждого до последней копейки. Методы приближенной оценки, описанные в данной главе, сделают обе эти задачи (и многие другие аналогичные) вполне решаемыми. Сложение, вычитание, деление и умножение — все поддается приближенной оценке. Как обычно, мы будем выполнять расчеты слева направо.

ПРИБЛИЖЕННАЯ ОЦЕНКА В СЛОЖЕНИИ

Приближенная оценка — хороший способ облегчить себе жизнь, когда при решении задачи список чисел для запоминания становится слишком длинным. Трюк сводится к округлению исходных чисел в большую или меньшую сторону.

$$\begin{array}{rcl} 8365 & & 8000 \\ + 5819 & \approx & + 6000 \\ \hline 14\ 186 & & 14\ 000 \end{array}$$

(\approx приближенные значения)

Джордж Биддер: инженер-«калькулятор»

У англичан тоже была своя когорта мастеров молниеносных вычислений. Например, устные выступления Джорджа Биддера (1806–1878), уроженца Девоншира, производили на зрителей неизгладимое впечатление. Как и большинство математических талантов, Биддер увлекся арифметическими задачами, еще будучи мальчишкой, и учился счету, сложению, вычитанию, умножению и делению в процессе игры с мраморными шариками. На гастроли со своим отцом юный Биддер отправился в возрасте девяти лет.

Почти ни один из задаваемых вопросов не был для него сложным. «Если Луна находится на расстоянии 123 256 миль от Земли, а звук движется со скоростью четыре мили в минуту, сколько времени понадобится звуку для путешествия с Земли на Луну?» Молодой Биддер, сморщив ненадолго в раздумье лоб, выпалил: «Двадцать один день, девять часов, тридцать четыре минуты». (Сегодня-то мы знаем, что это расстояние чуть ближе к 240 000 милям, а звук не может перемещаться через вакуум.) В десять лет Биддер мысленно извлек квадратный корень из 119 550 66 121, получив ответ 345 761 всего за 30 секунд. В 1818 году Биддер и молниеносный вычислитель из США Зера Колберн сошлись в ментальной счетной дуэли, в которой Биддер, по-видимому, «численно» превзошел Колберна.

На волне славы Джордж Биддер поступил в университет Эдинбурга и впоследствии стал одним из наиболее уважаемых инженеров в Англии. В парламентских дебатах по поводу

железнодорожных конфликтов Биддер часто выступал в качестве свидетеля, от чего его оппонентов бросало в дрожь. Кто-то сказал: «Природа наделила его определенными качествами, которые лишали его соперников справедливого положения». В отличие от Колберна, покинувшего семейство молниеносных вычислителей в возрасте двадцати лет, Биддер сохранял свой статус на протяжении всей жизни. Так, в 1878 году, незадолго до смерти, Биддер рассчитал число световых волн, попадающих в глаз за одну секунду, основываясь на том, что существует 36 918 волн красного света на дюйм и что свет передвигается со скоростью примерно 190 тысяч миль в секунду.

Обратите внимание: мы округлили первое число в большую сторону до ближайшей тысячи, а второе — в меньшую, тоже до ближайшей тысячи. Так как точный ответ равен 14 186, погрешность относительно мала.

Если хотите получить более точный ответ, вместо того чтобы округлять в сторону ближайшей тысячи, округляйте в сторону ближайшей сотни.

$$\begin{array}{r} 8365 \\ + 5819 \\ \hline 14186 \end{array} \approx \begin{array}{r} 8400 \\ + 5800 \\ \hline 14200 \end{array}$$

Ответ лишь на 14 единиц отличается от точного ответа: относительная погрешность меньше чем 0,1%. Вот это я называю отличной приближенной оценкой!

Попробуйте задачу на сложение пятизначных чисел, округляя их до ближайшей сотни.

$$\begin{array}{r} 46187 \\ + 19378 \\ \hline 65565 \end{array} \approx \begin{array}{r} 46200 \\ + 19400 \\ \hline 65600 \end{array}$$

Благодаря округлению до ближайшей сотни погрешность нашего ответа всегда будет меньше 100. Если ответ больше 10 000, приближенная оценка будет в пределах 1% от точного ответа.

Теперь попробуем что-нибудь посложнее.

$$\begin{array}{rcl}
 \mathbf{23\ 859\ 379} & & \mathbf{24\ 000\ 000} & & \mathbf{23\ 900\ 000} \\
 \mathbf{+ 7\ 426\ 087} & \approx & \mathbf{+ 7\ 000\ 000} & \text{или} & \mathbf{+ 7\ 400\ 000} \\
 \mathbf{31\ 285\ 466} & & \mathbf{31\ 000\ 000} & & \mathbf{31\ 300\ 000}
 \end{array}$$

Если вы округлите до ближайшего миллиона, то получите ответ в 31 миллион, что примерно на 285 000 меньше истинного значения. Неплохо, конечно, но вы можете улучшить ответ, округляя до ближайших ста тысяч, как показано в последнем столбце. В этом случае приближенная оценка снова будет в пределах находиться 1% от точного ответа. Если вы научитесь находить точные ответы для таких задач с меньшими числами, то сможете приблизительно оценить ответ в любой задаче.

Приближенная оценка в супермаркете

Рассмотрим пример из реальной жизни. Придя в магазин, вы когда-нибудь интересовались общей суммой покупки до того, как кассир пробил чек? Для оценки общей суммы я использую технику округления цен до ближайших 50 центов. Например, пока кассир складывает числа, показанные слева, я мысленно суммирую числа, показанные справа.

1,39	1,50
0,87	1,00
2,46	2,50
0,61	0,50
3,29	3,50

2,99	3,00
0,20	0,00
1,17	1,00
0,65	0,50
2,93	3,00
3,19	3,00
19,75	19,50

Моя итоговая цена, как правило, колеблется в пределах одного доллара от точного значения.

ПРИБЛИЖЕННАЯ ОЦЕНКА ПРИ ВЫЧИТАНИИ

Способ получения приближенной оценки при вычитании такой же, как и при сложении: округляем до ближайшей тысячи или сотни (последнее предпочтительнее).

$$\begin{array}{r}
 \mathbf{8367} \\
 \underline{- \mathbf{5819}} \\
 \mathbf{2548}
 \end{array}
 \approx
 \begin{array}{r}
 \mathbf{8000} \\
 \underline{- \mathbf{6000}} \\
 \mathbf{2000}
 \end{array}
 \text{ или }
 \begin{array}{r}
 \mathbf{8400} \\
 \underline{- \mathbf{5800}} \\
 \mathbf{2600}
 \end{array}$$

Как видите, округление до ближайшей тысячи делает ответ не совсем корректным. Благодаря округлению второй цифры (до сотен в нашем примере) погрешность обычно колеблется в пределах 3%. В данной задаче приближенное решение отклоняется от истинного ответа лишь на 52, поэтому относительная погрешность составляет 2%. Если округлять третью цифру, то относительная погрешность обычно будет меньше 1%. Например:

$$\begin{array}{r}
 \mathbf{439\ 412} \\
 \underline{- \mathbf{24\ 936}} \\
 \mathbf{414\ 476}
 \end{array}
 \approx
 \begin{array}{r}
 \mathbf{440\ 000} \\
 \underline{- \mathbf{20\ 000}} \\
 \mathbf{420\ 000}
 \end{array}
 \text{ или }
 \begin{array}{r}
 \mathbf{439\ 000} \\
 \underline{- \mathbf{25\ 000}} \\
 \mathbf{414\ 000}
 \end{array}$$

Путем округления третьей цифры вместо второй можно значительно улучшить точность оценки.

ПРИБЛИЖЕННАЯ ОЦЕНКА ПРИ ДЕЛЕНИИ

Первый и самый важный шаг расчета приближенного ответа для задачи на деление — это определить величину частного.

$$\begin{array}{r} 9\ 187,5 \\ 6 \overline{)57\ 867,0} \end{array} \approx \begin{array}{r} 9 \\ 6 \overline{)58\ 000} \\ \underline{54} \\ 4 \end{array}$$

Ответ ≈ 9 и $2/3$ тысячи, или 9 667

Следующий шаг — округление большего из чисел до ближайшей тысячи, то есть замена 57 867 на 58 000. Деление 58 на 6 дает 9 с остатком. Но самый важный элемент решения данной задачи — это поиск местоположения цифры 9.

Например, в результате умножения 6×90 получается 540, тогда как $6 \times 900 = 5400$. Оба варианта дают слишком малые числа. Но $6 \times 9000 = 54\ 000$, что достаточно близко к делимому. Это говорит о том, что ответ будет 9 000 плюс «что-то». Можно прикинуть это «что-то», сначала отняв $58 - 54 = 4$. В этом случае вам нужно снести 0 и разделить 40 на 6 и т. д. Но если вы внимательны, то поймете, что деление 4 на 6 дает $4/6 = 2/3$, что приблизительно равно 0,667. Поскольку ваш ответ «9 000 плюс что-то», теперь можно сказать «9 667». В действительности точный ответ будет 9 645. Чертовски близко!

Деление чисел на таком уровне кажется довольно простым. Но как быть с большими задачами на деление? Скажем, мы хотим посчитать, забавы ради, сколько зарабатывает

профессиональный спортсмен в день, если его зарплата за год составляет 5 000 000 долларов.

365 дней | 5 000 000

Первым делом нужно оценить примерный ответ. Этот игрок зарабатывает каждый день тысячи? Ну, если $365 \times 1000 = 365\,000$, то получается слишком мало.

Или десятки тысяч? Ну, $365 \times 10\,000 = 3\,650\,000$. Это уже больше похоже на правду. Для получения приближенной оценки разделите первые две цифры (50 на 36), и у вас получится 1 и $14/36$, или 1 и $7/18$. Так как 70 — это примерно 4 раза по 18, выходит, что спортсмен зарабатывает около 14 000 долларов в день. Точный ответ — 13 698,63 доллара. Неплохая точность. (И неплохая зарплата!)

А вот астрономический расчет. Сколько секунд необходимо свету, чтобы долететь от Солнца до Земли? Свет перемещается со скоростью 186 282 мили в секунду, а Солнце находится на расстоянии (в среднем) 92 960 130 миль от Земли. Я сомневаюсь, что вы очень хотите решить эту задачу вручную. К счастью, приближенную оценку ответа достаточно легко получить. Сначала упростим задачу.

186 282 | 92 690 130 ≈ 186 | 93 000

Теперь разделим 930 на 186, что даст нам 5 без остатка. Потом добавим два 0, которые забрали у 93 000, и получим 500 секунд. Точный ответ — 499,02 секунды. Этот пример показывает, что приближенная оценка может заслуживать большого уважения.

ПРИБЛИЖЕННАЯ ОЦЕНКА ПРИ УМНОЖЕНИИ

Для приблизительной оценки ответов в задачах на умножение используются примерно те же приемы, что и описанные выше. Например:

$$\begin{array}{r} 88 \\ \times 54 \\ \hline 4752 \end{array} \approx \begin{array}{r} 90 \\ \times 50 \\ \hline 4500 \end{array}$$

Округление до ближайшего кратного 10 значительно упрощает задачу, но ответ все еще на 252 меньше истинного (погрешность около 5%). Можно улучшить ситуацию, округлив оба числа на одинаковую величину в разных направлениях. Так, если округлить 88 до 90, то 54 следует уменьшить на 2.

$$\begin{array}{r} 88 \\ \times 54 \\ \hline 4752 \end{array} \approx \begin{array}{r} 90 \\ \times 52 \\ \hline 4680 \end{array}$$

Итак, вместо задачи на умножение типа «2 на 2» теперь мы имеем дело с умножением типа «2 на 1», что не должно быть для вас сложным. В данном случае приближенная оценка отклоняется от истинного значения всего на 1,5%.

Если приближенный ответ для задачи на умножение получен путем округления большего числа в большую сторону и меньшего в меньшую, то он будет несколько занижен. Если округлить большее число в меньшую сторону, а меньшее в большую (тогда, возможно, числа станут достаточно близкими), приближенный ответ получится слегка завышенным. Чем больше величина, на которую вы округляете в ту или иную сторону, тем большее отклонение будет иметь приближенная оценка. Например:

$$\begin{array}{r} 73 \\ \times 65 \\ \hline 4745 \end{array} \approx \begin{array}{r} 70 \\ \times 68 \\ \hline 4760 \end{array}$$

Поскольку после округления числа стали близки друг к другу, приближенная оценка получилась слегка завышенной.

$$\begin{array}{r} 67 \\ \times 67 \\ \hline 4489 \end{array} \approx \begin{array}{r} 70 \\ \times 64 \\ \hline 4480 \end{array}$$

Так как перемножаемые числа не близки друг к другу, приближенная оценка ответа занижена, но ненамного. Нетрудно заметить, что метод приближенной оценки весьма эффективно работает для примеров на умножение. Кроме того, обратите внимание, что данный пример — это задача на возведение в квадрат 67^2 , и наше приближение — всего лишь первый шаг в технике возведения в квадрат. Рассмотрим еще один пример.

$$\begin{array}{r} 83 \\ \times 52 \\ \hline 4316 \end{array} \approx \begin{array}{r} 85 \\ \times 50 \\ \hline 4250 \end{array}$$

Заметим, что приближение будет наиболее точным, когда исходные числа близки друг к другу. Попробуйте оценить ответ для задачи типа «3 на 2».

$$\begin{array}{r} 728 \\ \times 63 \\ \hline 45\ 864 \end{array} \approx \begin{array}{r} 731 \\ \times 60 \\ \hline 43\ 860 \end{array}$$

Путем округления 63 до 60 и 728 до 731 создается задача на умножение типа «3 на 1», что отдаляет приближенную оценку на величину 2004 от точного ответа. Здесь погрешность составляет 4,3%.

Попробуйте дать приблизительную оценку следующей задаче «3 на 3».

$$\begin{array}{r} 368 \\ \times 492 \\ \hline 180\ 564 \end{array} \approx \begin{array}{r} 359 \\ \times 500 \\ \hline 179\ 500 \end{array}$$

Как видите, хотя мы округлили оба числа на 8 в разные стороны, приближенный ответ отклоняется более чем на 1000 от точного значения. Так происходит потому, что перемножаемые числа в данной задаче большие и число, на которое они округляются, тоже большое. Поэтому получившаяся в результате оценка будет отклоняться на бóльшую величину. Но относительная погрешность по-прежнему меньше 1%.

Насколько далеко можно зайти, используя систему приближенной оценки для задач на умножение? На столько, на сколько пожелаете. Просто нужно знать названия больших чисел. Тысяча тысяч — это миллион, тысяча миллионов — миллиард. Зная это, попробуйте решить задачу со следующими числами.

$$\begin{array}{r} 28\ 657\ 497 \\ \times 13\ 864 \\ \hline \end{array} \approx \begin{array}{r} 29\ 000\ 000 \\ \times 14\ 000 \\ \hline \end{array}$$

Как и ранее, она сводится к округлению чисел, для того чтобы они стали простыми, такими как 29 000 000 и 14 000. Отбросив все нули, получим обычную задачу «2 на 2»: $29 \times 14 = 406$ ($29 \times 14 = 29 \times 7 \times 2 = 203 \times 2 = 406$). Следовательно, ответ равен приблизительно 406 миллиардам, так как тысяча миллионов — это миллиард.

ОЦЕНКА КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ: ДЕЛЕНИЕ И УСРЕДНЕНИЕ

Корень квадратный из n (обозначается \sqrt{n}) — это число, которое при умножении само на себя дает n . Например, квадратный корень из 9 равен 3, поскольку $3 \times 3 = 9$. Квадратный корень используется при решении многих научных и инженерных задач и почти всегда рассчитывается на калькуляторе. Следующий метод обеспечивает точную оценку ответа.

При оценке квадратного корня основная цель — найти число, которое при умножении само на себя приближается к исходному. Так как квадратный корень из большинства чисел не целое число, ваша оценка, вероятно, тоже будет содержать дробную часть.

Начнем с приближенной оценки квадратного корня из 19. Первое действие — выяснить, какое число при умножении само на себя будет максимально приближаться к 19. Берем два возможных варианта: $4 \times 4 = 16$ и $5 \times 5 = 25$. Так как 25 слишком много, ответ должен быть 4 плюс «что-то». Следующий шаг — деление 19 на 4, дающее 4,75. Поскольку 4×4 меньше, чем $4 \times 4,75 = 19$ (что, в свою очередь, меньше произведения $4,75 \times 4,75$), получается, что 19 (или $4 \times 4,75$) находится между 4^2 и $4,75^2$. Следовательно, квадратный корень из 19 лежит где-то между 4 и 4,75.

Я бы предположил, что он будет посередине, на отметке 4,375. В действительности это 4,359, так что наша оценка довольно близка к истинному значению. Проиллюстрируем данную процедуру следующим образом.

Деление:

$$\begin{array}{r} 4,75 \\ 4 \overline{)19,0} \\ \underline{16} \\ 30 \\ \underline{28} \\ 20 \\ \underline{20} \\ 0 \end{array}$$

Среднее:

$$\frac{4 + 4,75}{2} = 4,375$$

На самом деле данный ответ можно получить другим, более простым способом. Мы знаем, что 4 в квадрате равно 16, что меньше 19 на 3 единицы. Чтобы уточнить нашу оценку, *прибавим к ней погрешность, деленную на удвоенное предположение*. То есть к 4 прибавим 3, деленное на 8, чтобы получить $4\frac{3}{8} = 4,375$. Заметим, что этот метод всегда будет давать ответ немного больше точного.

Теперь попробуйте решить более сложный пример. Чему равен квадратный корень из 87?

Деление:

$$\begin{array}{r} 9,66 \\ 9 \overline{)87,0} \end{array}$$

Среднее:

$$\frac{9 + 9,66}{2} = 9,33$$

Сначала определим приблизительный итог исходя из того, что $9 \times 9 = 81$ и $10 \times 10 = 100$. Это означает, что ответом будет 9 с хвостиком. Поделив 87 на 9 (до десятых), получим 9,66. Чтобы улучшить приближенную оценку, возьмем среднее между 9 и 9,66, которое равно 9,33 — точный квадратный корень из 87, округленный до десятых! Другим способом приближенная оценка равна $9 + (\text{погрешность})/18 = 9 + 6/18 = 9,33$.

Использование этой техники делает приближенную оценку квадратного корня довольно-таки легкой для двузначных чисел. Но как насчет трехзначных? Здесь ситуация ненамного сложнее. Могу сразу сообщить, что все трехзначные и четырехзначные числа имеют двузначные квадратные корни (с точностью до десятых). И процедура их вычисления такая же, независимо от того, насколько велико число. Например, чтобы извлечь квадратный корень из 679, сначала нужно оценить ответ. Поскольку 20 — это квадратный корень из 400, а 30 — квадратный корень из 900, квадратный корень из 679 должен лежать между 20 и 30.

Если разделить 679 на 20, выйдет примерно 34. Усреднение 20 и 34 дает приблизительную оценку 27, но есть вариант получше. Если вы знаете, что 25 в квадрате 625, то погрешность $679 - 625 = 54$. Разделив это число на 50, получим $54/50 = 108/100 = 1,08$. Следовательно, улучшенная оценка составит $25 + 1,08 = 26,08$. (Для еще более точной оценки: если вы знаете, что 26 в квадрате 676, погрешность будет 3, так что прибавьте $3/52$ (приблизительно равно 0,06) и получите 26,06.) С точностью до сотых ответ будет равен 26,06.

Чтобы приближенно оценить квадратный корень из четырехзначного числа, взгляните на его первые две цифры. Например, чтобы найти квадратный корень из 7369, оцените квадратный корень из 73. Так как $8 \times 8 = 64$, а $9 \times 9 = 81$, то 8 должна быть первой цифрой квадратного корня. Значит, равняемся на «80 плюс...». Теперь приступим к обычному методу решения. Деление 7369 на 80 дает 92 плюс дробь, так что хорошим приближением будет 86^* . Если возвести в квадрат 86, что

* Здесь надо пояснить, откуда взялась цифра 6. Это половина разности $92 - 80 = 12$. *Прим. ред.*

равняется 7396, то это число на 27 больше 7369. Теперь делим разность 27 на удвоенное число 86, получаем $27/172$, что приближенно равно 0,16. Отсюда следует, что улучшенная оценка $86 - 0,16 = 85,84$.

Приближенная оценка квадратного корня из шестизначного числа вроде 593 472 может показаться невозможной для непосвященного. Но вы даже не успеете устать. Так как $700^2 = 490\,000$ и $800^2 = 640\,000$, квадратный корень из 593 472 должен находиться между 700 и 800. На самом деле все пяти- и шестизначные числа имеют трехзначные квадратные корни. На практике вам нужно извлечь квадратный корень только из первых двух цифр шестизначного числа (или из первой цифры пятизначного). Выяснив, что квадратный корень из 59 лежит между 7 и 8, вы определите, что ответ равен «700 плюс...».

Теперь перейдем к привычному способу представления.

Деление:

$$\begin{array}{r} 847 \\ 700 \overline{)593\,472} \end{array} \approx \begin{array}{r} 847 \\ 7 \overline{)5934} \end{array}$$

Среднее:

$$\frac{700 + 847}{2} = 773,5$$

Квадратный корень из 593 472 равен 770,37, так что вы довольно близки к правильному решению. Но можно приблизиться еще больше. Как это сделать, покажет следующий прием.

Обратите внимание, что первые две цифры 59 ближе к 64 (8×8), чем к 49 (7×7). Благодаря этому можно начать оценку с цифры 8 и продолжить, отталкиваясь от нее.

Деление:

$$\begin{array}{r} 741 \\ 800 \overline{)593\,472} \end{array} \approx \begin{array}{r} 741 \\ 8 \overline{)5934} \end{array}$$

Среднее:

$$\frac{800 + 741}{2} = 770,5$$

Просто ради забавы сделаем что-нибудь с настоящей громадиной: извлечем квадратный корень из 28 674 529. Это не так трудно, как может показаться. Первый шаг — округление до наибольшего ближайшего числа. В данном случае надо просто найти квадратный корень из 29.

Деление:

$$\begin{array}{r} 5,8 \\ 5 \overline{)29,0} \\ \underline{25} \\ 40 \end{array}$$

Среднее:

$$\frac{5 + 5,8}{2} = 5,4$$

Все семизначные и восьмизначные числа имеют четырехзначные квадратные корни. Таким образом, 5,4 становится 5400 — это оценка. А более точный ответ — 5354,8. Неплохо!

На этом мы завершим главу о приближенных оценках в математике. После выполнения упражнений, представленных в ее конце, переходите к следующей главе о математике с ручкой и бумагой: вы научитесь записывать ответы в задачах быстрее, чем делали это раньше.

Математическая дуэль Эвариста Галуа

Трагическая история французского математика Эвариста Галуа (1811–1832), убитого в возрасте двадцати лет на дуэли из-за «печально известной кокетки», стала легендарной в истории математики. Не по годам развитый блестящий студент, Галуа заложил основу для раздела математики, известного как теория групп. Легенда гласит, что он изложил на бумаге эту теорию в ночь перед дуэлью, предвидя кончину и желая оставить свое наследие математическому сообществу. За несколько часов до смерти 30 мая 1832 года Галуа написал Огюсту

Шевалье: «Я сделал несколько новых открытий в анализе. Первое касается теории уравнений, остальные — интегральных функций». После этого он попросил друга: «Обратитесь с публичной просьбой к Якоби или Гауссу, чтобы высказали свое мнение не по поводу истинности, а насчет важности этих теорем. Я надеюсь, что кому-нибудь покажется интересным и полезным разобраться в этом беспорядке».

Романтическая легенда и историческая правда, однако, не всегда совпадают. То, что Гаула написал в ночь перед смертью, представляло собой исправления и редакторские правки в документах, принятых Академией наук задолго до этого. Более того, первоначальные документы Гаула были представлены за три года до дуэли, когда ему исполнилось всего семнадцать! Именно после этого он оказался втянутым в политический конфликт, был арестован, провел какое-то время в темнице и в конечном счете ввязался в ссору из-за женщины и был убит.

Осознавая свою преждевременную зрелость, Гаула отмечал: «Я проводил исследования, которые остановят других ученых». На протяжении более чем ста лет так и происходило.

СОВЕТЫ ПО ПОВОДУ СОВЕТОВ

В главе 0 мы рассказывали, как в большинстве случаев проще вычислить сумму чаевых. Например, чтобы подсчитать 10% чаевых, надо всего-навсего умножить счет на 0,1 (или поделить его на 10). Например, если счет равен 42 долларам, то 10% чаевых составят 4,20 доллара. Для вычисления 20% чаевых надо просто умножить счет на 0,2 или удвоить величину 10% чаевых. Так, 20% чаевых по счету в 42 доллара будут равны 8,40 доллара.

Для вычисления 15% чаевых имеется несколько приемов. Если вы освоили техники из главы 2 и подружились

с умножением, то вы просто можете умножить сумму счета на 15 и затем разделить полученный результат на 100. Например, при счете 42 доллара: $42 \times 15 = 42 \times 5 \times 3 = 210 \times 3 = 630$, что легко делится на 100 и дает чаевые в размере 6,30 доллара. Другой метод: взять среднее от 10% и 20% чаевых. В соответствии с нашими ранними вычислениями это выглядит так:

$$\frac{\$4,20 + \$8,40}{2} = \frac{\$12,60}{2} = \$6,30.$$

Наверное, самый популярный способ подсчета 15% чаевых состоит в том, чтобы взять 10% от общего счета, разделить их на два (что соответствует 5%), а затем сложить полученные значения. Например, при счете 42 доллара надо сложить 4,20 доллара и половину этой величины, то есть 2,10 доллара:

$$4,20 + 2,10 = 6,30.$$

Применим все три метода, чтобы вычислить 15% от счета в 67 долларов. Прямой метод: $67 \times 3 \times 5 = 201 \times 5 = 1005$, что при делении на 100 дает 10,05 доллара. Метод усреднения: усредняем 10% чаевых в виде 6,70 доллара и 20% в виде 13,40 доллара и получаем:

$$\frac{\$6,70 + \$13,40}{2} = \frac{\$20,10}{2} = \$10,05.$$

Используя последний метод, прибавляем 6,70 доллара к половине данной величины, равной 3,35 доллара, чтобы получить

$$6,70 + 3,35 = 10,05.$$

Наконец, для подсчета 25% чаевых мы предлагаем два метода. Либо умножьте сумму на 25, а затем разделите на 100, либо разделите сумму на 4 (возможно, путем двойного деления

числа на два). Например, при счете в 42 доллара можно вычислить $42 \times 25 = 42 \times 5 \times 5 = 210 \times 5 = 1050$, что при делении на 100 дает чаевые в размере 10,50 доллара. Или можно разделить исходную величину на 4, или сократить ее наполовину дважды: половина 42 долларов — 21 доллар, и еще пополам — 10,50 доллара. При счете в 67 долларов я бы, вероятно, разделил прямо на 4: так как $67 \div 4 = 16 \frac{3}{4}$, получаем 25% чаевых в размере 16,75 доллара.

НЕОБРЕМЕНИТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ НАЛОГОВ

В этом разделе я продемонстрирую метод устной оценки величины налога с продаж. Для некоторых налоговых ставок, таких как 5%, или 6%, или 10%, требуются прямые вычисления. Например, чтобы посчитать налог 6%, нужно просто умножить цену на 6 и разделить на 100. Допустим, цена составляет 58 долларов, тогда $58 \times 6 = 348$, что при делении на 100 дает точный размер налога с продаж 3,48 доллара. (При этом общая сумма будет равна 61,48 доллара.)

Но как посчитать налог в 6,5% от 58 долларов? Я покажу вам несколько способов, как это сделать, а вы выберете тот, который покажется вам наиболее приемлемым. Наверное, самый легкий способ прибавить полпроцента к любой сумме в долларах состоит в ее делении пополам и последующем переводе в центы. В примере с 58 долларами их половина составляет 29. Поэтому просто прибавьте 29 центов к 6% налога (уже посчитанным 3,48 доллара) и получите налог в размере 3,77 доллара.

Другой метод расчета ответа (или хорошей устной оценки) состоит в следующем: берем налог в 6%, делим его на 12, затем складываем эти два числа. Например, 6% от 58 долларов равно

3,48 доллара, а 348 при делении на 12 даст почти 30, поэтому прибавляем 30 центов для получения оценки в 3,78 доллара, что отличается от точного значения всего на один цент. Если вы предпочитаете делить на 10 вместо 12, попробуйте. Вы вычислите 6,6% вместо 6,5% (так как $6/10 = 0,6$), но это все еще будет хорошей оценкой. Здесь вы возьмете 3,48 доллара и прибавите 34 цента для получения 3,82 доллара.

Попробуем другие процентные ставки налога с продаж. Как посчитать 7,25% от 124 долларов? Вначале вычислите 7% от 124. С помощью методов, показанных в главе 2, вы найдете, что $124 \times 7 = 868$. Значит, 7% от 124 будет 8,68 доллара. Чтобы прибавить четверть процента, можно разделить исходную сумму в долларах на 4 (или сократить ее наполовину дважды) и перевести доллары в центы. Здесь $124 \div 4 = 31$, поэтому прибавьте 31 цент к 8,68 доллара и получите точный размер налога — 8,99 доллара.

Еще один способ прийти к 31 центу: возьмите налог с продаж 7% (8,68 доллара) и разделите его на 28. Причина, по которой это работает, заключается в том, что $7/28 = 1/4$. Для быстрой устной оценки я бы, вероятно, разделил 8,68 доллара на 30, чтобы получить около 29 центов. Тогда приблизительный налог с продаж будет равен 8,97 доллара.

Деля на 30, в действительности вы вычисляете налог в размере 7 и $7/30\%$, что приблизительно составляет 7,23% вместо 7,25%.

Как бы вы посчитали налог с продаж в размере 7,75%? Вероятно, для большинства приближений достаточно сказать, что это немного меньше 8%. Здесь вы найдете несколько предложений для получения лучших приближений. Как вы убедились в прошлом примере, если вы с легкостью можете

вычислить корректировку в 0,25%, то, просто утроив это число, можно получить корректировку в 0,75%. Например, чтобы найти 7,75% от 124 долларов, вы сначала рассчитываете 7%, что составит 8,68 доллара. Если вы вычислите, что $0,25\% = 31$ цент, то 0,75% будет равно 93 центам; для получения общего итога сложим $8,68 + 0,93 = 9,61$ доллара. Для быстрой оценки можно использовать тот факт, что $7/9 = 0,777$ приблизительно равно 0,75. Поэтому можно разделить 7% налога на 9, чтобы получить оценку, несколько превышающую 0,75%. В данном примере, если при делении 8,68 доллара на 9 получим около 96 центов, то просто складываем $8,68 + 0,96 = 9,64$ доллара, что почти совпадает с точным значением, хоть и с незначительным превышением.

Такую процедуру приближения можно использовать для любых налогов с продаж. Вот общая формула: чтобы оценить налог с продаж в размере $A, B\%$ долларов, сначала умножьте цену на $A\%$. Затем разделите эту величину на число D , где A/D равняется $0, B$. (Таким образом, $D = A/B$.) Сумма этих чисел составит общий размер налога. (Или его оценку, если вы округлили D до некоторого числа для упрощения вычислений.) Например, с налогом 7,75% магический делитель D равен $7 \times \frac{4}{3} = \frac{28}{3} = 9 \frac{1}{3}$, что мы округлим до 9 в меньшую сторону. Для налога с продаж в размере 6 и $\frac{3}{8}\%$ сначала посчитайте налог в размере 6%, затем разделите полученное число на 16, так как $6/16 = 3/8$. (Чтобы разделить число на 16, разделите его дважды на 4, или сначала на 8, а затем на 2.) Попробуйте придумать метод для расчета налога с продаж в вашем регионе. Вы поймете, что эта задача не столь сложна, как кажется!

НЕСКОЛЬКО ИНТЕРЕСНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

В этом разделе мы вкратце рассмотрим несколько практических задач, связанных с процентами, временем увеличения суммы ваших сбережений и сроками погашения кредита.

Начнем со знаменитого *Правила 70*, которое гласит: **чтобы найти число лет, необходимых для удвоения ваших денег, разделите число 70 на годовую процентную ставку**. Предположим, вам предложили инвестиционную возможность, которая сулит выплаты в размере 5% годовых. Так как $70 \div 5 = 14$, потребуется около 14 лет, чтобы ваши деньги удвоились. Например, если вы разместили 1000 долларов на депозите под такую процентную ставку, то после 14 лет на нем будет $1000 \times (1,05)^{14} = 1979,93$ доллара. С процентной ставкой 7%, согласно правилу 70, вам понадобится около 10 лет для удвоения денег. В самом деле, если вы вложите 1000 долларов по этой годовой процентной ставке, то через 10 лет получите $1000 \times (1,07)^{10} = 1967,15$ доллара. Что касается ставки в 2%, то для удвоения сбережений в данном случае понадобится около 35 лет!

$$1000 \times (1,02)^{35} = 1999,88$$

Еще одно похожее правило называется *Правило 110*; оно определяет, как долго ваши деньги будут утраиваться. Например, при ставке в 5%, так как $110 \div 5 = 22$, потребуется около 22 лет для того, чтобы 1000 долларов превратилась в 3000 долларов. Это подтверждается вычислением $1000 \times (1,05)^{22} = 2\,925,26$ доллара. Правило 70 и Правило 110 основаны на свойствах числа $e = 2,71828\dots$ и «натуральных логарифмах», но, к счастью, нам нет нужды использовать высшую математику, чтобы применять их.

Предположим, вы заняли деньги и рано или поздно должны их вернуть. Например, вы взяли кредит 360 000 долларов с годовой ставкой 6% (то есть 0,5% ставки каждый месяц) на 30 лет. Сколько примерно придется выплачивать ежемесячно? Прежде всего, каждый месяц вам понадобится 1800 долларов (360 000 долларов умножить на 0,5% = 1800 долларов) только для того, чтобы покрыть проценты. (Хотя на самом деле ваши долги по процентам будут распределяться равномерно.) Так как вы совершите $30 \times 12 = 360$ месячных выплат, то выплата дополнительной тысячи долларов каждый месяц покрывает остаток вашего займа. Итак, верхняя граница ежемесячных выплат будет равна 1800 долларов + 1000 долларов = 2800 долларов. К счастью, вам не придется платить столько сверху. Вот мое правило большого пальца для оценки месячных платежей.

Обозначим буквой i вашу *месячную* процентную ставку. (Годовая ставка, деленная на 12.) Тогда для выплаты кредита в размере P долларов за N месяцев месячная выплата M будет приблизительно равна:

$$M = \frac{Pi(1+i)^N}{(1+i)^N - 1}.$$

В нашем последнем примере $P = 360\,000$ долларов и $i = 0,005$. Формула показывает, что месячная выплата должна составлять:

$$M = \frac{\$360\,000 \times 0,005 \times (1,005)^{360}}{(1,005)^{360} - 1}.$$

Обратите внимание, что первые два числа в числителе при умножении дают 1800 долларов. С помощью калькулятора (для разнообразия) подсчитаем $(1,005)^{360} = 6,02$, тогда месячная

выплата должна равняться $1800 \times (6,02)/5,02$, что примерно составляет 2160 долларов в месяц.

Еще один пример. Предположим, вы взяли машину в кредит и после первоначального взноса должны выплатить 18 000 долларов за 5 лет с годовой ставкой 4%. Без процентов вы должны были бы платить 300 долларов ($18\,000 \div 60$) в месяц. Так как ставка процента за первый месяц будет составлять $18\,000 \times 0,04/12 = 720/12 = 60$ долларов, отсюда следует, что платить в месяц нужно не больше $300 + 60 = 360$ долларов. Здесь месячный процент $i = 0,04/12 = 0,00333$. Применим нашу формулу и получим:

$$M = \frac{\$18\,000 \times 0,00333 \times (1,00333)^{60}}{(1,00333)^{60} - 1}.$$

Так как $(1,00333)^{60} = 1,22$, размер месячной выплаты составит $60 \times 1,22/0,22 = 333$ доллара.

Подведем итоги этой главы упражнениями, которые, надеюсь, поддержат ваш интерес к представленным здесь темам.

УПРАЖНЕНИЯ НА ПРИБЛИЖЕННУЮ ОЦЕНКУ

Решите следующие упражнения на вычисление приближенной оценки; затем сверьте свои ответы и ход вычислений с ответами в конце книги.

УПРАЖНЕНИЕ: ПРИБЛИЖЕННАЯ ОЦЕНКА ПРИ СЛОЖЕНИИ

Округлите эти числа в ту или иную сторону и посмотрите, насколько вы близки к точному ответу.

- | | | | |
|----|-----------------|----|--------------------|
| 1. | 1479 | 3. | 312 025 |
| | + 1105 | | + 79 419 |
| 2. | 57 293 | 4. | 8 971 011 |
| | + 37 421 | | + 4 016 367 |

Искусство приближенной оценки

Устно оцените сумму для следующего столбика чисел, округляя их до ближайших 50 центов.

2,67
1,95
7,25
9,21
0,49
11,21
0,12
6,14
8,31

УПРАЖНЕНИЕ: ПРИБЛИЖЕННАЯ ОЦЕНКА ПРИ ВЫЧИТАНИИ

Оцените ответы следующих задач на вычитание, используя округление до второй или третьей цифры.

1. **4926** 2. **67 221** 3. **526 978** 4. **8 349 241**
- 1659 **- 9 874** **- 42 009** **- 6 103 839**

УПРАЖНЕНИЕ: ПРИБЛИЖЕННАЯ ОЦЕНКА ПРИ ДЕЛЕНИИ

Скорректируйте числа таким образом, чтобы у вас появилась возможность дать приближенную оценку результатам деления.

1. **7)4379** 2. **5)23 958** 3. **13)549 213**
4. **289)5 102 357** 5. **203 637)8 329 483**

**УПРАЖНЕНИЕ:
ПРИБЛИЖЕННАЯ ОЦЕНКА ПРИ УМНОЖЕНИИ**

Скорректируйте числа таким образом, чтобы у вас появилась возможность дать приближенную оценку результатам умножения.

1. $\begin{array}{r} 98 \\ \times 27 \\ \hline \end{array}$ 2. $\begin{array}{r} 76 \\ \times 42 \\ \hline \end{array}$ 3. $\begin{array}{r} 88 \\ \times 88 \\ \hline \end{array}$ 4. $\begin{array}{r} 539 \\ \times 17 \\ \hline \end{array}$ 5. $\begin{array}{r} 312 \\ \times 98 \\ \hline \end{array}$
6. $\begin{array}{r} 639 \\ \times 107 \\ \hline \end{array}$ 7. $\begin{array}{r} 428 \\ \times 313 \\ \hline \end{array}$ 8. $\begin{array}{r} 51\ 276 \\ \times 489 \\ \hline \end{array}$ 9. $\begin{array}{r} 104\ 972 \\ \times 11\ 201 \\ \hline \end{array}$ 10. $\begin{array}{r} 5\ 462\ 741 \\ \times 203\ 413 \\ \hline \end{array}$

**УПРАЖНЕНИЕ:
ПРИБЛИЖЕННАЯ ОЦЕНКА КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ**

Оцените квадратные корни следующих чисел, используя методы деления и усреднения.

1. $\sqrt{17}$ 2. $\sqrt{35}$ 3. $\sqrt{163}$ 4. $\sqrt{4279}$ 5. $\sqrt{8039}$

УПРАЖНЕНИЕ: КАЖДОДНЕВНАЯ МАТЕМАТИКА

1. Вычислите 15% от 88 долларов.
2. Вычислите 15% от 53 долларов.
3. Вычислите 25% от 74 долларов.
4. Сколько времени потребуется для удвоения денег при годовой ставке в 10%?
5. Сколько времени потребуется для удвоения суммы при годовой ставке в 6%?
6. Сколько времени понадобится для утроения суммы при годовой ставке в 7%?

Искусство приближенной оценки

7. Сколько времени потребуется для увеличения средств в 4 раза при годовой ставке в 7%?
8. Оцените размер месячной выплаты за кредит в 100 000 долларов при процентной ставке 9% в течение 10 лет?
9. Оцените размер месячной выплаты за кредит в 30 000 долларов при процентной ставке 5% в течение 4 лет?

Глава 6

Математика с ручкой и бумагой

Во введении я упоминал о выгодах, которые вы получите от умения считать в уме. В этой главе я расскажу о том, как ускорить вычисления на бумаге. С тех пор как появились калькуляторы, они успели взять на себя бóльшую часть выполнения арифметических действий во многих ситуациях. Поэтому в этой главе я предпочел сосредоточиться на забытом искусстве вычисления квадратных корней и методе «крест-накрест» для перемножения больших чисел. Надо сказать, что в основном для разминки мозга, а не для практического применения, я сначала затрону сложение и вычитание и покажу вам парочку любопытных приемов для ускорения этого процесса. Вообще-то эти техники можно успешно использовать в повседневной жизни, в чем вы вскоре убедитесь.

Если вы готовы встретиться с более трудными задачками на умножение, можете пропустить эту главу и сразу перейти к главе 7, критически важной для освоения навыков работы с большими задачами из главы 8. Если же вам нужен перерыв и вы просто хотите немного развлечься, рекомендую прочитать эту главу — вы получите удовольствие от того, что вновь обратились к ручке и бумаге.

СТОЛБИКИ ЧИСЕЛ

Сложение длинных столбиков чисел — как раз та самая задача, с которой вы можете столкнуться по работе или во время подсчета собственных доходов и расходов. Суммируйте числа из следующего столбика привычным способом, а затем посмотрите, как это сделал я.

$$\begin{array}{r}
 4328 \\
 884 \\
 620 \\
 1477 \\
 617 \\
 + 725 \\
 \hline
 8651
 \end{array}$$

Когда у меня есть ручка и бумага, я складываю числа сверху вниз и справа налево, как учили в школе. Практикуясь, вы сможете решать эти задачи в уме так же быстро (или быстрее), как и на калькуляторе. Когда я суммирую цифры, единственные числа, которые я «слышу», — это частичные суммы. Я всегда сначала суммирую крайнюю справа колонку: $8 + 4 + 0 + 7 + 7 + 5$ и слышу: $8... 12... 19... 26... 31$. Затем я записываю 1, держа в уме 3. Следующая колонка звучит так: $3... 5... 13... 15... 22... 23... 25$. Получив итоговый ответ, я записываю его, а затем проверяю свои вычисления путем сложения чисел снизу вверх и обычно получаю такой же результат.

Например, суммирую цифры первой колонки снизу вверх: $5 + 7 + 7 + 0 + 4 + 8$ (у меня в голове при этом звучит $5... 12... 19... 23... 31$), затем мысленно переношу цифру 3 и складываю $3 + 2 + 1 + 7 + 2 + 8 + 2$ и т. д. Благодаря сложению чисел в другом порядке вы снижаете вероятность совершить одинаковую

ошибку дважды. Конечно, если ответы отличаются, то хотя бы одно из вычислений было неправильным.

МОДУЛЬНЫЕ СУММЫ

Когда я не уверен в ответе, я проверяю решение, используя метод, который называю «модульные суммы» (потому что он основан на элегантной математике из раздела модульной арифметики^{*}). Он также известен под названиями «цифровые корни» и «метод сравнений по модулю 9». Признаю, что этот метод не слишком практичен, зато он легок в применении.

В методе модульных сумм вы складываете цифры каждого из чисел до тех пор, пока не останется одна-единственная цифра. Например, чтобы вычислить модульную сумму числа 4328, сложите $4 + 3 + 2 + 8 = 17$. Затем суммируйте цифры числа 17, получится $1 + 7 = 8$. Следовательно, модульная сумма числа 4328 равна 8. Для предыдущей задачи модульная сумма каждого из чисел вычисляется таким образом:

$$\begin{array}{rcl}
 4328 & \rightarrow 17 & \rightarrow 8 \\
 884 & \rightarrow 20 & \rightarrow 2 \\
 620 & \rightarrow 8 & \rightarrow 8 \\
 1477 & \rightarrow 19 \rightarrow 10 & \rightarrow 1 \\
 617 & \rightarrow 14 & \rightarrow 5 \\
 + 725 & \rightarrow 14 & \rightarrow + 5 \\
 \hline
 8651 & & 29 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 20 & & 11 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 2 & & 2
 \end{array}$$

* Точнее, из теории чисел, где используются так называемые сравнения по модулю. *Прим. ред.*

Как показано выше, следующий шаг — сложение всех модульных сумм $8 + 2 + 8 + 1 + 5 + 5$. Получается 29, что дает модульную сумму 11, которая, в свою очередь, дает модульную сумму 2. Обратите внимание, что модульная сумма числа 8651 тоже равняется 2. Это не совпадение! Если вы посчитали ответ и модульную сумму правильно, то ваша итоговая модульная сумма должна быть такой же. Если они различаются, то вы определенно допустили где-то ошибку: существует вероятность (около 1 к 9), что совпадение модульных сумм будет случайным. При наличии ошибки этот метод позволит обнаружить ее в 8 случаях из 9.

Метод модульных сумм больше известен математикам и бухгалтерам как «метод сравнений по модулю 9», потому что модульная сумма числа обычно равна остатку, полученному в результате деления на 9. В случае числа 8651 модульная сумма равна 2: если вы разделите 8651 на 9, то в ответе будет 961 с остатком 2. Существует одно небольшое исключение. Напомним, что сумма цифр любого числа, кратного 9, тоже кратна 9. Значит, если число кратно 9, оно будет иметь модульную сумму 9, даже если остаток равен 0.

ВЫЧИТАНИЕ НА БУМАГЕ

Нельзя вычитать столбцы чисел таким же способом, как складывать. Предпочтительнее последовательно отнимать число за числом. Это означает, что все задачи на вычитание включают лишь два числа. Еще раз повторю: с карандашом и бумагой легче вычитать справа налево. Чтобы проверить ответ, прибавьте его ко второму числу. Если все правильно, то должно получиться вычитаемое число.

Если хотите, то для проверки ответа можно использовать модульные суммы. Разница здесь (по сравнению со сложением) в том, что нужно вычитать их и затем сравнить полученное число с модульной суммой ответа.

$$\begin{array}{r}
 65\ 717 \rightarrow 8 \\
 - 38\ 491 \rightarrow -7 \\
 \hline
 27\ 226 \rightarrow 1 \\
 \downarrow \qquad \downarrow \\
 19 \rightarrow 10
 \end{array}$$

Существует еще одно ухищрение. Если разница модульных сумм отрицательна или равна 0, прибавьте к ней 9. Например:

$$\begin{array}{r}
 42\ 689 \qquad 2 \\
 - 18\ 764 \qquad - 8 \\
 \hline
 23\ 925 \qquad - 6 + 9 = 3 \\
 \downarrow \\
 21 \\
 \downarrow \\
 3
 \end{array}$$

КВАДРАТНЫЕ КОРНИ НА БУМАГЕ

С появлением карманных калькуляторов метод ручки и бумаги для вычисления квадратных корней практически ушел в небытие. Вы уже научились устно оценивать квадратные корни. Сейчас я покажу, как найти точное значение квадратного корня с помощью ручки и бумаги.

Помните, как в разделе приближенной оценки квадратных корней мы вычисляли квадратный корень из девятнадцати? Взглянем на задачу еще раз, используя метод, который даст вам точное значение квадратного корня.

Шаг 4. Следующая цифра частного будет наибольшим числом, которое может заполнить пропуски таким образом, чтобы результат умножения был меньше или равен текущему остатку. В данном случае это 3, поскольку $83 \times 3 = 249$, тогда как $84 \times 4 = 336$, что превышает остаток 300. Запишите это число в верхней строчке, где записывается ответ, над второй цифрой следующих двух чисел; в данном случае цифра 3 будет находиться над вторым нулем. Теперь имеем ответ в виде 4,3.

Шаг 5. Если вы хотите получить больше цифр в ответе, вычтите произведение из остатка (например, $300 - 249 = 51$) и снесите следующие две цифры; в данном случае 51 превратится в 5100, что станет текущим остатком. Теперь повторите шаги 3 и 4.

Для получения третьей цифры квадратного корня удвойте частное, снова игнорируя все цифры после запятой: $43 \times 2 = 86$. Поместите $86_ \times _$ слева от 5100. Цифра 5 даст нам $865 \times 5 = 4325$, наибольшее произведение, которое меньше 5100. Пятерка будет стоять в ответе сверху над следующими двумя числами, в данном случае над двумя нулями. Теперь ответ: 4,35. Для получения большего количества цифр после запятой повторите процедуру, как мы сделали в примере.

А вот пример нечетного количества цифр перед запятой.

$$\begin{array}{r}
 \mathbf{28,97} \\
 \sqrt{\mathbf{839,4000}} \\
 \mathbf{2^2 = 4} \quad \underline{\hspace{1cm}} \\
 \mathbf{4_} \times \mathbf{_} \leq \mathbf{439} \\
 \mathbf{48} \times \mathbf{8} = \mathbf{384} \quad \underline{\hspace{1cm}} \\
 \mathbf{56_} \times \mathbf{_} \leq \mathbf{5540} \\
 \mathbf{569} \times \mathbf{9} = \mathbf{5121} \quad \underline{\hspace{1cm}} \\
 \mathbf{578_} \times \mathbf{_} \leq \mathbf{41900} \\
 \mathbf{5787} \times \mathbf{7} = \mathbf{40509} \quad \underline{\hspace{1cm}}
 \end{array}$$

Теперь вычислим квадратный корень из четырехзначного числа. В данном случае (как и с двузначными числами) учитываем первые две цифры примера для определения первой цифры квадратного корня.

$$\begin{array}{r}
 82,06 \\
 \sqrt{6735,0000} \\
 8^2 = 64 \quad \underline{\hspace{1cm}} \\
 16_ \times _ \leq 335 \\
 16\underline{2} \times \underline{2} = \underline{324} \\
 164_ \times _ \leq 1100 \\
 164\underline{0} \times \underline{0} = \underline{\hspace{1cm}0} \\
 1640_ \times _ \leq 110000 \\
 1640\underline{6} \times \underline{6} = \underline{98436}
 \end{array}$$

Наконец, если число, из которого извлекается квадратный корень, имеет правильный (полный) квадрат, то узнать об этом можно, если в итоге получается нулевой остаток. Например:

$$\begin{array}{r}
 3,3 \\
 \sqrt{10,89} \\
 3^2 = \underline{9} \\
 6_ \times _ \leq 189 \\
 6\underline{3} \times \underline{3} = \underline{189} \\
 0
 \end{array}$$

УМНОЖЕНИЕ НА БУМАГЕ

Для умножения с ручкой и бумагой я использую *метод крест-накрест*, который позволяет записать весь ответ целиком в одну строчку и нигде не фиксировать промежуточные результаты! Это одна из самых впечатляющих демонстраций магии чисел, когда в вашем распоряжении есть ручка

и бумага. Многие вычислители из прошлого заработали себе репутацию «молниеносных» именно этим методом. Они получали два огромных числа и записывали ответ почти мгновенно. Методу крест-накрест лучше всего обучаться на примере.

$$\begin{array}{r} 47 \\ \times 34 \\ \hline 1598 \end{array}$$

Шаг 1. Сначала умножьте 4×7 и получите 28, запишите 8 и мысленно перенесите 2 на следующее вычисление.

$$\begin{array}{r} 4 \quad 7 \\ \quad | \\ 3 \quad 4 \end{array}$$

Шаг 2. Сложите $2 + (4 \times 4) + (3 \times 7) = 39$, запишите 9 и мысленно перенесите 3 на вычисления ниже.

$$\begin{array}{r} 4 \quad 7 \\ \quad \times \\ 3 \quad 4 \end{array}$$

Шаг 3. Закончите сложением $3 + (3 \times 4) = 15$ и запишите 15 для получения итогового ответа.

$$\begin{array}{r} 4 \quad 7 \\ | \\ 3 \quad 4 \end{array}$$

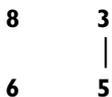
Вы только что записали ответ: 1598.

Решим другую задачу «2 на 2», используя метод крест-накрест.

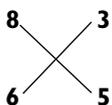
$$\begin{array}{r} 83 \\ \times 65 \\ \hline 5395 \end{array}$$

Последовательность шагов и схемы вычислений представим следующим образом:

Шаг 1. $5 \times 3 = \underline{15}$



Шаг 2. $1 + (5 \times 8) + (6 \times 3) = \underline{59}$



Шаг 3. $5 + (6 \times 8) = \underline{53}$



Ответ: 5395.

Метод крест-накрест немного усложняется в задачах типа «3 на 3».

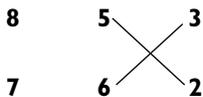
$$\begin{array}{r} 853 \\ \times 762 \\ \hline 649986 \end{array}$$

Процесс вычислений представлен ниже.

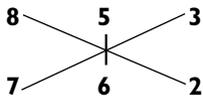
Шаг 1. $2 \times 3 = \underline{6}$



Шаг 2. $(5 \times 2) + (6 \times 3) = \underline{28}$



Шаг 3. $2 + (8 \times 2) + (7 \times 3) + (5 \times 6) = \underline{69}$



Шаг 4. $6 + (8 \times 6) + (7 \times 5) = \underline{89}$

8	5	3
7	6	2

Шаг 5. $8 + (8 \times 7) = \underline{64}$

8	5	3
7	6	2

Ответ: 649 986.

Обратите внимание, что количество умножений в каждом шаге составляет 1, 2, 3, 2 и 1 соответственно. Математика, лежащая в основе метода крест-накрест, не более чем распределительный закон. Например, $853 \times 762 = (800 + 50 + 3) \times (700 + 60 + 2) = (3 \times 2) + [(5 \times 2) + (6 \times 3)] \times 10 + [(8 \times 2) + (7 \times 3) + (5 \times 6)] \times 100 + [(8 \times 6) + (7 \times 5)] \times 1000 + (8 \times 7) \times 10\,000$, что в точности соответствует вычислениям по методу крест-накрест.

Можно проверить ответ с помощью модульной суммы путем перемножения модульных сумм двух чисел и вычисления модульной суммы получившегося в итоге числа. Сравните его с модульной суммой ответа. Если ответ правильный, то две модульные суммы должны совпадать. Например,

853	7
× 762	× 6
649 986	42
↓	↓
42	6
↓	
6	

Если модульные суммы не совпадают, вы допустили ошибку. Данный метод распознает ее в среднем в 8 случаях из 9.

Что касается примера «3 на 2», процедура аналогичная, за исключением того, что вы рассматриваете сотни второго числа как нули:

$$\begin{array}{r} 846 \\ \times 037 \\ \hline 31302 \end{array}$$

Шаг 1. $7 \times 6 = \underline{42}$

$$\begin{array}{r} 8 \quad 4 \quad 6 \\ 0 \quad 3 \quad 7 \\ | \end{array}$$

Шаг 2. $4 + (4 \times 7) + (6 \times 3) = \underline{50}$

$$\begin{array}{r} 8 \quad 4 \quad 6 \\ 0 \quad 3 \quad 7 \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}$$

Шаг 3. $5 + (8 \times 7) + (0 \times 6) +$
 $+ (4 \times 3) = \underline{73}$

$$\begin{array}{r} 8 \quad 4 \quad 6 \\ 0 \quad 3 \quad 7 \\ \diagdown \quad | \quad \diagup \end{array}$$

Шаг 4. $7 + (8 \times 3) + (0 \times 4) = \underline{31}$

$$\begin{array}{r} 8 \quad 4 \quad 6 \\ 0 \quad 3 \quad 7 \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}$$

Шаг 5. $3 + (8 \times 0) = \underline{3}$

$$\begin{array}{r} 8 \quad 4 \quad 6 \\ 0 \quad 3 \quad 7 \\ | \end{array}$$

Ответ: 31 302.

Конечно, на практике, как правило, просто игнорируется умножение на нуль. Метод крест-накрест подойдет для решения задач с любым количеством цифр в числе. Например, для решения задачи «5 на 5», которая приводится ниже, потребуются девять шагов. Количество умножений на каждом шаге будет 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1 (в сумме 25).

$$\begin{array}{r}
 42\ 867 \\
 \times 52\ 049 \\
 \hline
 2\ 231\ 184\ 483
 \end{array}$$

Шаг 1. $7 \times 9 = \underline{63}$

4	2	8	6	7
5	2	0	4	9

Шаг 2. $6 + (6 \times 6) + (4 \times 7) = \underline{88}$

4	2	8	6	7
			6	7
5	2	0	4	9

Шаг 3. $8 + (8 \times 9) + (0 \times 7) + (4 \times 6) = \underline{104}$

4	2	8	6	7
			6	7
5	2	0	4	9

Шаг 4. $10 + (2 \times 9) + (2 \times 7) + (4 \times 8) + (0 \times 6) = \underline{74}$

4	2	8	6	7
		8	6	7
5	2	0	4	9

Шаг 5. $7 + (4 \times 9) + (5 \times 7) + (4 \times 2) + (2 \times 6) + (0 \times 8) = \underline{98}$

4	2	8	6	7
		8	6	7
5	2	0	4	9

Шаг 6. $9 + (4 \times 4) + (5 \times 6) + (0 \times 2) + (2 \times 8) = \underline{71}$

4	2	8	6	7
		8	6	7
5	2	0	4	9

Шаг 7. $7 + (0 \times 4) + (5 \times 8) + (2 \times 2) = \underline{51}$

4	2	8	6	7
		8	6	7
5	2	0	4	9

Шаг 8. $5 + (2 \times 4) + (5 \times 2) = \underline{23}$

4	2	8	6	7
	2			
5	2	0	4	9

Шаг 9. $2 + (5 \times 4) = \underline{22}$

4	2	8	6	7
5	2	0	4	9

Ответ: 2 231 184 483.

Вы можете проверить ответ, используя метод модульных сумм.

	42 867	→	9
×	52 049	→	× 2
2 231 184 483	18		
	↓		↓
	36		9
	↓		
	9		

Шакунтала Деви: это не поддается расчету!

В 1976 году New York Times сообщила, что индийская женщина по имени Шакунтала Деви (р. 1939) сложила $25\,842 + 111\,201\,721 + 370\,247\,830 + 55\,511\,315$, а затем умножила полученную сумму на 9878 и дала правильный ответ $5\,559\,369\,456\,432$ менее чем за двадцать секунд. С трудом верится, однако, что необразованная дочь обедневших родителей сделала себе имя в Соединенных Штатах Америки и Европе в качестве молниеносного вычислителя.

К сожалению, большинство по-настоящему удивительных подвигов Деви, которые были совершены благодаря маленьким хитростям, скудно документированы. Ее величайшее заявленное достижение — умножение на время двух тринадцатизначных чисел на бумаге — появилось в Книге рекордов Гиннеса как пример «человека-компьютера». Однако время вычислений в лучшем случае вызывает сомнения. Деви,

мастер метода крест-накрест, перемножила $7\ 686\ 369\ 774\ 870 \times 2\ 465\ 099\ 745\ 799$ — числа, как сообщается, сгенерированные случайным образом в компьютерном отделе Имперского колледжа в Лондоне 18 июня 1980 года. Правильный ответ (18 947 668 177 995 426 773 730) был, якобы, воспроизведен ею за невероятные двадцать секунд. Гиннесс предлагает следующую оговорку: «Некоторые видные математики ставят под сомнение условия, при которых это было достигнуто и предсказывают, что для нее повторить такой подвиг под чрезвычайно строгим наблюдением было бы невозможно». Поскольку Деви предстояло решить 169 задач на умножение и 167 на сложение, то есть в общей сложности выполнить 336 операций, то она должна была бы производить каждый расчет в пределах десятой доли секунды без ошибок, затрачивая время на то, чтобы записать все 26 цифр ответа. Время вычисления само по себе возводит данный рекорд в категорию «это не поддается подсчету!».

Несмотря на это, Деви подтвердила свои способности путем выполнения быстрых расчетов и даже написала об этом книгу.

МЕТОД СРАВНЕНИЙ ПО МОДУЛЮ ОДИННАДЦАТИ

Чтобы перепроверить полученный ответ другим способом, можно использовать метод, известный как *сравнение по модулю 11*. Он похож на метод сравнения по модулю 9 за исключением того, что здесь вы сокращаете число, поочередно вычитая и прибавляя цифры справа налево, игнорируя десятичную запятую. Если результат отрицательный, к нему надо прибавить одиннадцать. (Вам может показаться заманчивым складывать и вычитать слева направо, как в случае с модульными суммами, но чтобы метод работал, необходимо это делать справа налево.)

Например:

$$\begin{array}{r}
 234,87 \rightarrow 7 - 8 + 4 - 3 + 2 = 2 \rightarrow 2 \\
 + \underline{58,61} \rightarrow 1 - 6 + 8 - 5 = -2 \rightarrow \underline{9} \\
 293,48 \rightarrow 8 - 4 + 3 - 9 + 2 = 0 \rightarrow 11 \rightarrow 0
 \end{array}$$

Этот же метод применим и для задач на вычитание:

$$\begin{array}{r}
 65,717 \rightarrow 14 \rightarrow 3 \\
 - \underline{38,491} \rightarrow -(-9) \rightarrow +9 \\
 27,226 \rightarrow 12 \rightarrow 1 \\
 \downarrow \\
 1
 \end{array}$$

Точно так же он работает и для задач на умножение:

$$\begin{array}{r}
 853 \rightarrow 6 \\
 \times \underline{762} \rightarrow \times 3 \\
 649\ 986 \rightarrow 18 \\
 \downarrow \qquad \downarrow \\
 -4\ (+11) \qquad 7 \\
 \downarrow \\
 7
 \end{array}$$

Если модульные числа не совпадают, значит, где-то допущена ошибка. Но даже если они совпадают, ошибка не исключена. В среднем этот метод распознает ошибку в 10 случаях из 11. Поэтому она имеет шанс пробраться сквозь караул числа одиннадцать (1 к 11) и числа девять (1 к 9), и только с шансом 1 к 99 будет незамеченной при использовании обоих типов проверки. За дополнительной информацией об этих и других очаровательных волшебных приемах предлагаю обратиться к любой из книг Мартина Гарднера по «занимательной математике»*.

* См., например: *Гарднер М.* Математические головоломки и развлечения. М. : АСТ, Зебра, 2010. *Прим. ред.*

Итак, теперь вы готовы к последней задаче на умножение в этой книге, решаемой с помощью ручки и бумаги: «10 на 10»! Хотя в ней отсутствует какая-либо практическая ценность, кроме возможности покрасоваться! (Лично мне кажется, что умножение пятизначных чисел уже и так достаточно впечатляющее действие, особенно с тех пор, как их решение перешло в сферу ответственности калькуляторов.) Я представлю здесь этот пример только для того, чтобы доказать: это выполнимо. Перекрестные умножения следуют тем же базовым схемам, что и при решении задачи «5 на 5». Вам предстоит девятнадцать шагов с вычислениями, а на десятом шаге — целых 10 перекрестных умножений! Поехали!

$$\begin{array}{r} 2\ 766\ 829\ 451 \\ \times 4\ 425\ 575\ 216 \\ \hline \end{array}$$

Вот как это считают:

Шаг 1. $1 \times 6 = \underline{6}$.

Шаг 2. $(5 \times 6) + (1 \times 1) = \underline{31}$.

Шаг 3. $3 + (4 \times 6) + (2 \times 1) + (5 \times 1) = \underline{34}$

Шаг 4. $3 + (9 \times 6) + (5 \times 1) + (4 \times 1) + (5 \times 2) = \underline{76}$

Шаг 5. $7 + (2 \times 6) + (1 \times 7) + (9 \times 1) + (5 \times 5) + (4 \times 2) = \underline{68}$

Шаг 6. $6 + (8 \times 6) + (5 \times 1) + (2 \times 1) + (7 \times 5) + (9 \times 2) + (5 \times 4) = \underline{134}$

Шаг 7. $13 + (6 \times 6) + (5 \times 1) + (8 \times 1) + (5 \times 5) + (2 \times 2) + (7 \times 4) + (9 \times 5) = \underline{164}$

Шаг 8. $6 + (6 \times 6) + (2 \times 1) + (6 \times 1) + (5 \times 5) + (8 \times 2) + (5 \times 4) + (2 \times 5) + (7 \times 9) = \underline{194}$

Шаг 9. $19 + (7 \times 6) + (4 \times 1) + (6 \times 1) + (2 \times 5) + (6 \times 2) + (5 \times 4) + (8 \times 5) + (5 \times 9) + (2 \times 7) = \underline{212}$

Шаг 10. $21 + (2 \times 6) + (4 \times 1) + (7 \times 1) + (4 \times 5) + (6 \times 2) + (2 \times 4) + (6 \times 5) + (5 \times 9) + (8 \times 7) + (5 \times 2) = \underline{225}$

Шаг 11. $22 + (1 \times 2) + (4 \times 5) + (2 \times 7) + (4 \times 4) + (5 \times 6) + (2 \times 9) + (7 \times 6) + (5 \times 2) + (5 \times 8) = 214$

Шаг 12. $21 + (2 \times 2) + (4 \times 4) + (5 \times 7) + (4 \times 9) + (7 \times 6) + (2 \times 2) + (5 \times 6) + (5 \times 8) = 228$

Шаг 13. $22 + (5 \times 2) + (4 \times 9) + (7 \times 7) + (4 \times 2) + (5 \times 6) + (2 \times 8) + (5 \times 6) = 201$

Шаг 14. $20 + (7 \times 2) + (4 \times 2) + (5 \times 7) + (4 \times 8) + (5 \times 6) + (2 \times 6) = 151$

Шаг 15. $15 + (5 \times 2) + (4 \times 8) + (5 \times 7) + (4 \times 6) + (2 \times 6) = 128$

Шаг 16. $12 + (5 \times 2) + (4 \times 6) + (2 \times 7) + (4 \times 6) = 84$

Шаг 17. $8 + (2 \times 2) + (4 \times 6) + (4 \times 7) = 64$

Шаг 18. $6 + (4 \times 2) + (4 \times 7) = 42$

Шаг 19. $4 + (4 \times 2) = 12$

Если вы сумели договориться с этой невероятно трудной задачей с первого раза, то вы на этапе перехода из разряда подмастерья в категорию мастера математической магии!

$$\begin{array}{r} 2\ 766\ 829\ 451 \rightarrow 5^* \\ \times 4\ 425\ 575\ 216 \rightarrow 5 \\ \hline 12\ 244\ 811\ 845\ 244\ 486\ 416 \rightarrow 7 \end{array}$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ С БУМАГОЙ И РУЧКОЙ

УПРАЖНЕНИЕ: СТОЛБЦЫ ЧИСЕЛ

Просуммируйте следующие столбцы чисел, проверяя свои ответы путем суммирования данных снизу вверх, а затем

* Для тех, кто не догадался, сообщаю, что здесь приведены модульные суммы, которые показывают, что вычисления выполнены правильно, так как $5 \times 5 = 25 \rightarrow 7$. *Прим. ред.*

с помощью метода модульных сумм. Если две модульные суммы не совпадают, проверьте сложение.

$$\begin{array}{r}
 672 \\
 1367 \\
 107 \\
 7845 \\
 358 \\
 210 \\
 + 916 \\
 \hline
 \end{array}$$

Просуммируйте этот столбик долларов и центов.

$$\begin{array}{r}
 21,56 \\
 19,38 \\
 211,02 \\
 9,16 \\
 26,17 \\
 + 1,43 \\
 \hline
 \end{array}$$

УПРАЖНЕНИЕ: ВЫЧИТАНИЕ НА БУМАГЕ

Вычитите следующие числа, используя метод модульных сумм для проверки ответа, а затем путем сложения ответа и вычитаемого.

$$\begin{array}{llll}
 1. & 75\ 423 & 2. & 876\ 452 \\
 & - 46\ 298 & & - 593\ 876 \\
 3. & 3\ 249\ 202 & 4. & 45\ 394\ 358 \\
 & - 2\ 903\ 445 & & - 36\ 472\ 659
 \end{array}$$

УПРАЖНЕНИЕ: ВЫЧИСЛЕНИЕ КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ

Для следующих чисел найдите точный квадратный корень, используя техники удвоения и деления.

$$1. \sqrt{15} \quad 2. \sqrt{502} \quad 3. \sqrt{439,2} \quad 4. \sqrt{361}$$

УПРАЖНЕНИЕ: УМНОЖЕНИЕ НА БУМАГЕ

Для решения этих упражнений примените метод крест-накрест, чтобы найти точный ответ. Проверьте ответы с помощью метода модульных сумм.

- | | | | | | |
|----|----------------------|----|------------------------|----|---------------------------|
| 1. | 54 | 2. | 273 | 3. | 725 |
| | <u>× 37</u> | | <u>× 217</u> | | <u>× 609</u> |
| 4. | 3309 | 5. | 52 819 | 6. | 3 923 759 |
| | <u>× 2868</u> | | <u>× 47 820</u> | | <u>× 2 674 093</u> |

Глава 7

Запоминающаяся глава для запоминания чисел*

Наиболее часто мне задают вопрос о моей памяти. Нет, сразу скажу я вам, она у меня не феноменальная. Скорее, я применяю систему мнемотехники, которая может быть изучена любым человеком и описана на следующих страницах. Научные эксперименты показали, что обычный человек со средним интеллектом может освоить их и развить способность запоминать числа.

В этой главе мы расскажем, как улучшить память на числа. Это не только имеет такие очевидные практические выгоды, как запоминание дат или телефонных номеров, но и позволяет решать в уме большие вычислительные задачи. А в следующей главе мы покажем, как, применяя методы из этой главы, умножать в уме пятизначные числа!

* Эта глава оказалась самой трудной для перевода и редактирования, поскольку здесь для чисел используется английский фонетический код. После долгих раздумий было решено сохранить оригинальный английский фонетический код, приводя, где это возможно, русский фонетический код для чисел. Сразу уточним, что среди многочисленных русских фонетических кодов выбрана система О. Степанова как наиболее часто рекомендуемая. Литературу по русской мнемотехнике можно найти в конце книги в разделе «Библиография». *Прим. ред.*

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МНЕМОНИКИ

Метод, который здесь представлен, — это пример мнемоники, то есть инструмента для улучшения памяти в процессе запоминания и извлечение данных. Мнемоника работает путем преобразования непонятных данных (например, последовательностей цифр) в нечто более подходящее. Попробуйте найти минутку для того, чтобы запомнить следующую фразу:

My turtle Pancho will, my love, pick up my new mover, Ginger.

(«Моя черепаха Панчо, моя любовь, забрать мой новый двигатель, имбирь».)

Прочитайте ее несколько раз. Не перелистывайте следующие страницы, чтобы увидеть, как выглядит черепаха Панчо или узнать, кто забрал мой новый двигатель и что означает имбирь. Просто запомните эту фразу. Запомнили?

Поздравляю! Вы только что запомнили первые двадцать четыре цифры математического выражения числа π (пи). Напомню: число π — это отношение длины окружности к ее диаметру и, как учили в школе, приблизительно равно 3,14, или $22/7$. На самом деле π иррациональное число (в нем цифры после запятой продолжают бесконечно без повторяющихся последовательностей цифр). Современные компьютеры рассчитали для π миллиарды знаков после запятой.

ФОНЕТИЧЕСКИЙ КОД

Я уверен, что вам интересно, как фраза, которую вы запомнили, преобразуется в 24 знака числа π .

Чтобы узнать это, в первую очередь необходимо запомнить фонетический код, представленный ниже, где каждой цифре от 0 до 9 назначается соответствующий звук.

<i>Английский фонетический код</i>	<i>Русский фонетический код</i>
1 — звук <i>t</i> или <i>d</i>	1 — звук <i>p</i>
2 — звук <i>n</i>	2 — звук <i>д</i> или <i>г</i>
3 — звук <i>m</i>	3 — звук <i>т</i> или <i>з</i>
4 — звук <i>r</i>	4 — звук <i>ч</i> или <i>к</i>
5 — звук <i>l</i>	5 — звук <i>п</i> или <i>б</i>
6 — звук <i>j, ch</i> или <i>sh</i>	6 — звук <i>ш</i> или <i>ж</i>
7 — звук <i>k</i> или твердое <i>g</i>	7 — звук <i>с</i>
8 — звук <i>f</i> или <i>v</i>	8 — звук <i>в</i> или <i>ф</i>
9 — звук <i>p</i> или <i>b</i>	9 — звук <i>м</i>
0 — звук <i>z</i> или <i>s</i>	0 — звук <i>н</i> или <i>л</i>

Запомнить этот код не так сложно, как кажется. С одной стороны, заметьте, что в тех случаях, когда одной цифре соответствует более одной буквы, эти буквы имеют похожее произношение. С другой — вы можете положиться на следующие подсказки, которые помогут вам запомнить код.

1. Машинописные *t* и *d* имеют только 1 идущий вниз штрих.
2. Машинописная *n* имеет 2 идущих вниз штриха.
3. Машинописная *m* имеет 3 идущих вниз штриха.
4. Число 4 (*four*) заканчивается буквой *r*.
5. Форма руки с четырьмя поднятыми вверх пальцами, когда большой палец повернут на 90 градусов, — это 5 пальцев в виде буквы *L* (прописной).
6. Буква *J* (прописная) похожа на повернутую в обратную сторону *6*.
7. Букву *K* (прописную) можно нарисовать, сложив две семерки спиной к спине.
8. Строчная буква *f*, написанная курсивом, выглядит как 8.

9. Число 9 выглядит как повернутая в обратную сторону буква *p* или как перевернутая буква *b*.
0. Слово *zero* (ноль) начинается с буквы *z*.

Аналогичные подсказки для русской кодировки:

1. С буквы *P* начинается слово «раз».
2. С буквы *Д* начинается слово «два», а буква *Г*, набранная курсивом, напоминает цифру 2.
3. С буквы *T* начинается слово «три», а буква *З* похожа на цифру 3.
4. С буквы *Ч* начинается слово «четыре», а с буквы *К* — слово «квадрат».
5. С буквы *П* начинается слово «пять», а буква *Б* внешне и по звучанию похожа на цифру 5.
6. С буквы *Ш* начинается слово «шесть», а буква *Щ* звучит похоже.
7. С буквы *С* начинается слово «семь».
8. С буквы *В* начинается слово «восемь», а буква *Ф* имеет сходное звучание.
9. С буквы *М* начинается слово «много», так как 9 самая большая цифра.
0. Буквы *Н* и *Л* в слове «НоЛь».

Запомнить этот список достаточно просто, если выучить имя *Tony Marloshkovips!**

Попрактикуйтесь в заучивании списка. Минут через десять вы должны четко знать все согласные буквы и звуки, которые соответствуют всем цифрам. Затем можно приступить к преобразованию чисел в слова, помещая гласные вокруг или

* Согласные буквы в этом имени совпадают (хотя бы по звучанию) с буквами, которые приписываются цифрам. *Прим. ред.*

между согласных. Например, число 32 можно представить любым из следующих слов: *tan, ten, mine, mane, moon, man, money, тени, атен, отен, атино, мини, минни* и т. д. Обратите внимание, что слово *minnie* допустимо, так как звук *n* (а не буква *n*) здесь появляется только один раз.

Следующие слова не могут представлять число 32, потому что в них используются другие согласные звуки: *tourn, melon, mint*. Эти слова представляют числа 342, 352 и 321. Согласные *h, w* и *u* можно свободно добавлять в слова, так как их нет в списке. Поэтому число 32 можно также представить словами *human, woman, уеотан* или *ту honeу*.

Следующий список дает хорошее представление о тех словах, которые можно создать с помощью фонетического кода и которые обозначают числа от 0 до 100. Не ставьте себе цель обязательно запомнить этот список, используйте его по своему усмотрению для вдохновения и изучения возможностей фонетического кода.

1 tie	26 notch	51 light	76 cage
2 knee	27 neck	52 lion	77 cake
3 emu	28 knife	53 lamb	78 cave
4 ear	29 knob	54 lure	79 cap
5 law	30 mouse	55 lily	80 face
6 shoe	31 mat	56 leash	81 fight
7 cow	32 moon	57 log	82 phone
8 ivy	33 mummy	58 leaf	83 foam
9 bee	34 mower	59 lip	84 fire
10 dice	35 mule	60 cheese	85 file
11 tot	36 match	61 sheet	86 fish
12 tin	37 mug	62 chain	87 fog
13 tomb	38 movie	63 chum	88 fife
14 tire	39 map	64 cherry	89 V.I.P.

15 towel	40 rose	65 jail	90 bus
16 dish	41 rod	66 judge	91 bat
17 duck	42 rain	67 chalk	92 bun
18 dove	43 ram	68 chef	93 bomb
19 tub	44 rear	69 ship	94 bear
20 nose	45 roll	70 kiss	95 bell
21 nut	46 roach	71 kite	96 beach
22 nun	47 rock	72 coin	97 book
23 name	48 roof	73 comb	98 puff
24 Nero	49 rope	74 car	99 puppy
25 nail	50 lace	75 coal	100 daisies

Список число — слово

Для закрепления в памяти переведите следующие числа в слова, а затем проверьте ниже правильность перевода. Заметьте, что перевод числа в слово выполняется неоднозначно, поскольку можно придумать множество слов, которые могут соответствовать данному числу.

42
74
67
86
93
10
55
367
826
951
620

Вот некоторые слова, которые я придумал для этих чисел.

<i>Английские эквиваленты чисел</i>	<i>Русские эквиваленты чисел</i>
42 rain, rhino, Reno, ruin, urn	чага, кади
74 car, cry, guru, carry	сок, сечь
67 jug, shock, chalk, joke, shake, hijack	шасси, щас
86 fish, fudge	ваш, ваще
93 bum, bomb, beam, palm, pam	мать, мазь
10 toss, dice, toes, dizzy, oats, hats	рана, ралли, руль
55 lily, lola, hallelujah!	папа, баба, бип
826 finch, finish, vanish	видишь
951 pilot, plot, belt, bolt, bullet	Мольер
620 jeans, chains, genius	Шаганэ
367 magic!	ту шасси

В качестве упражнения переведите следующие слова в числа.

dog
oven
cart
fossil
banana
garage
pencil
Mudd
multiplication
Cleveland
Ohio

Ответы:

dog: 17
oven: 82
cart: 741
fossil: 805

banana:	922
garage:	746
pencil:	9 205
Mudd:	31
multiplication:	35 195 762
Cleveland:	758 521
Ohio:	нет числа

Хотя обычно число можно преобразовать в слова несколькими способами, слово преобразуется только в одно-единственное число. Это очень важное свойство для применения фонетического кодирования, поскольку оно позволяет запоминать и вспоминать конкретные числа.

Данная система позволяет перевести любое число или ряд чисел (например, номера телефонов, карточек социального страхования, водительских прав, цифры числа π) в слово или предложение. Вот как работает фонетический код для представления первых двадцати четырех цифр числа π .

3 1415 926 5 3 58 97 9 3 2 384 6264
My turtle Pancho will, my love, pick up my new mover, Ginger.

Напомню, что в фонетическом коде *g* является твердым согласным звуком, как в слове *grass*, тогда как мягкий *g* (как в слове *Ginger*) звучит как *j* и представляет цифру 6. Кроме того, слово *will* фонетически созвучно *L* и представляет цифру 5. Звук *w* можно свободно использовать, так как он не применяется в кодах цифр. Поскольку это предложение можно преобразовать в двадцать четыре цифры, как показано выше, то вы фактически запомнили число π до двадцати четырех цифр!

Этот код позволяет запоминать бесконечно большое количество чисел. Например, следующие два предложения

в добавление к приведенному выше предложению «Моя черепаха Панчо...» позволяют запомнить первые шестьдесят цифр π .

3 38 327 950 2 8841 971
My movie monkey plays in a favorite bucket.

А также

69 3 99 375 1 05820 97494
Ship my puppy Michael to Sullivan's backrubber.

Если вы запомнили шестьдесят цифр, будет нетрудно запомнить и все сто цифр.

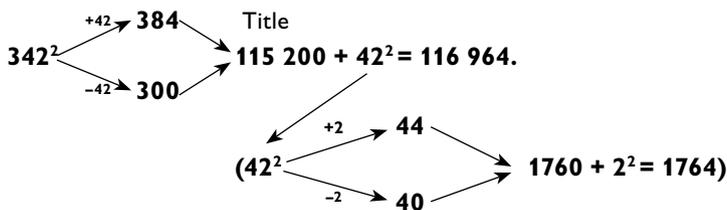
45 92 307 81 640 62 8 620
A really open music video cheers Jenny F. Jones.

8 99 86 28 0 3482 5 21 1 7067
Have a baby fish knife so Marvin will marinate the goosechick.

Вы сможете гордиться собой, как только эти предложения начнут бойко слетать с вашего языка и вы станете быстро переводить их в числа. Но у вас есть шанс пойти на мировой рекорд. Хироюки Гото из Японии в 1995 году по памяти перечислил 42 195 цифр числа π за семнадцать часов и двадцать одну минуту.

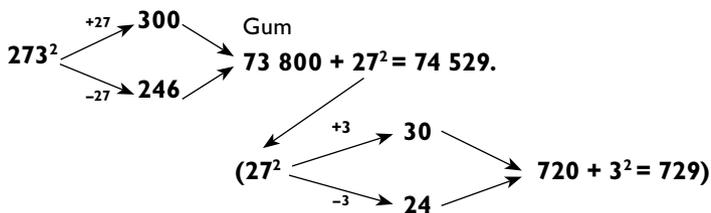
КАК МНЕМОТЕХНИКА ОБЛЕГЧАЕТ УСТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Помимо улучшения способности запоминать длинные последовательности цифр, мнемоника помогает запоминать частичные результаты в середине процесса решения трудной вычислительной задачи. Например, вот как можно использовать фонетический код при возведении в квадрат трехзначного числа.



Как вы помните из главы 3, чтобы возвести в квадрат число 342, надо сначала перемножить 384×300 , что даст 115 200, а затем к полученному числу прибавить 42^2 . Но к тому времени, когда вы возведете 42 в квадрат, вы можете забыть число 115 200. Вот здесь система мнемотехники и придет на помощь. Для сохранения в памяти числа 115 200 запомните 200 по руке, зажав два пальца, и преобразуйте 115 в слово, скажем, *title**. Повторите слово *title* про себя один или два раза. Его проще запомнить, чем число 115 200, особенно после запуска процесса вычисления 42^2 . После того как найдете $42^2 = 1764$, можно прибавить к этому числу число *title* 2, то есть 115 200, и получить итоговый результат 116 964.

Вот еще один пример.



* По-русски для этого числа трудно придумать фонетический эквивалент. *Прим. ред.*

После умножения $300 \times 246 = 73\,800$ преобразуем 73 в *gut** и запомним 800 с помощью пальцев. Вычислив $27^2 = 729$, вам останется лишь прибавить к этому числу число *gut* 8, то есть 73 800, и получить ответ 74 529. Это может поначалу показаться немного громоздким, но постепенно преобразование чисел в слова и обратно станет вашей второй натурой.

Вы видели, как легко двузначные числа переводятся в простые слова. Но вот с трехзначными числами дело обстоит несколько сложнее. Если вы не можете придумать простое слово с помощью мнемонической техники, подберите необычное слово или просто придумайте новое. Например, если нет простых слов для чисел 286 или 638 и ничего быстро не приходит на ум, воспользуйтесь словосочетанием *no fudge* или новым словом, таким как *jam-off*. Даже эти необычные слова легче в течение длительного расчета удерживать в памяти, чем числа 286 или 638. Для решения некоторых больших задач из следующей главы приемы мнемотехники незаменимы.

Части числа π Александра Крейга Эйткена

Возможно, один из самых впечатляющих подвигов устного счета был совершен профессором математики Эдинбургского университета Александром Крейгом Эйткеном (1895–1967), который не только знал значение π до 1000 знаков, но и быстро выпалил первые 250 цифр π , когда его во время лекции попросили продемонстрировать свою удивительную память. Затем его попросили пропустить ряд цифр, начать с 551-й цифры и перечислить далее 150 цифр. Он успешно с этим справился, не сделав ни единой ошибки.

* Здесь проблем с придумыванием фонетического эквивалента нет. Например, подойдет слово «сеть». *Прим. ред.*

Как у него это получалось? Эйткен объяснил слушателям, что «секрет, на его взгляд, кроется в релаксации (расслаблении), полной противоположности концентрации, которая принимается за правило». Техника Эйткена была более слуховой, чем обычно. Он разбил число на куски по пятьдесят цифр и запомнил их в своеобразном ритме. С обескураживающим доверием он объяснил: «Этот подвиг оказался бы предсудительно бесполезным, если бы совершить его не было так просто».

То, что Эйткен помнил тысячу знаков числа π , не делает его молниеносным вычислителем. Однако он умел легко перемножать в уме пятизначные числа. Математик по имени Томас О'Бейрн вспоминает, как Эйткена демонстрировали калькулятор при покупке. «Продавец, — пишет О'Бейрн, — сказал что-то вроде: “Теперь мы умножим 23 586 на 7 283”. Эйткен сразу выпалил: “И получите 171 776 838”. Продавец был настолько увлечен продажей, что не обратил внимания на слова Эйткена, но его менеджер, который наблюдал за происходящим, заметил. Убедившись, что Эйткен прав, он чуть было не закатил истерику (как и я!)».

Как ни странно, Эйткен отметил, что после покупки настольного калькулятора его умственные способности быстро ухудшились. Предвидя ожидаемое будущее, он посоветовал: «Ментальные вычислители, как тасманийцы или маори, обречены на вымирание. Поэтому может быть почти антропологический интерес к этим любопытным особям, а некоторые из моих знакомых в году примерно 2000-м смогут сказать “Да, я знал, одного из таких”». К счастью, его прогноз не оправдался!

МАГИЯ ПАМЯТИ

Без использования мнемотехники обычная человеческая память (включая мою) способна удерживать только семь или

восемь цифр одновременно. Однако техника замены чисел словами позволяет значительно расширить ее объем. Попросите кого-нибудь медленно перечислить шестнадцать цифр, и пусть другой человек записывает их на доске или листе бумаги. Как только они будут записаны, вы сможете повторить их в точном обратном порядке, не глядя на доску или бумагу! На недавней лекционной демонстрации мне дали следующий ряд цифр:

1, 2, 9, 7, 3, 6, 2, 7, 9, 3, 3, 2, 8, 2, 6, 1

Как только цифры были названы, я использовал фонетический код, чтобы превратить их в слова, а затем объединить в замысловатую историю. При этом число 12 стало словом *tiny* (крошечный), 97 — *book* (книга), 362 — *machine* (машина), 793 — *kaboom*^{*}, 32 — *moon* (луна) и 8261 — *finished* (окончание).

Я объединил эти слова-числа в глупую историю, которая помогла мне их запомнить. Я представил крошечную книгу (*tiny book*) и поместил ее внутрь машины (*machine*). Затем машина с грохотом (*kaboom*) разогналась и забросила меня на Луну (*moon*), где все и закончилось (*finished*). Эта история может показаться нелепой, но в том-то и фокус: чем она смешнее, тем легче запоминается и, кроме того, поднимает настроение.

* Придуманное слово по звучанию соответствует «шуму» или «грохоту». *Прим. ред.*

Глава 8

Сложное делаем легким: продвинутое умножение

К настоящему моменту (если вы к нему шли глава за главой) вы научились выполнять устное сложение, вычитание, умножение и деление так же хорошо, как и овладели искусством приближенной оценки, карандашно-бумажной магии чисел и создания фонетического кода чисел для запоминания. Эта глава для серьезных, несгибаемых математиков, которые хотят раздвинуть границы своего разума для устных вычислений. Задачи здесь варьируются от возведения в квадрат четырехзначных чисел до самых больших, которые я решал на публике: умножение двух пятизначных чисел.

Для решения этих задач особенно важно чувствовать себя уверенно при использовании фонетического кода и достаточно быстро его применять. И хотя, если вы заглянете вперед на несколько страниц, проблемы могут казаться действительно трудными, позвольте мне вновь заявить о двух основных посылах этой книги: во-первых, любой навык устных вычислений может быть освоен почти каждым, во-вторых, ключ состоит в упрощении всех примеров и их превращении в более простые задачи, которые легко решаются. В этой главе (да и любой другой) нет ни одной задачи, которая была бы неподвластна средствам техник упрощения, изученных вами в предыдущих главах. Так как мы предполагаем, что вы

овладели всеми необходимыми для этого приемами, будем учить вас преимущественно с использованием схем вычислений, а не проходить задачки слово за словом. Напомним, что многие из простых задач, встроенных в эти громадные примеры, уже встречались вам в предыдущих главах.

Начнем с возведения в квадрат четырехзначных чисел. Удачи!

КВАДРАТ ЧЕТЫРЕХЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

В качестве подготовительного навыка для развития умения возводить в квадрат четырехзначные числа вам необходимо освоить решение задач на умножение типа «4 на 1». Такую задачу мы разбиваем на две подзадачи типа «2 на 1», как показано ниже.

$$\begin{array}{r}
 4\ 867\ (4800 + 67) \\
 \times \quad 9 \\
 \hline
 9 \times 4\ 800 = 43\ 200 \\
 9 \times 67 = + \quad 603 \\
 \hline
 43\ 803
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2\ 781\ (2700 + 81) \\
 \times \quad 4 \\
 \hline
 4 \times 2\ 700 = 10\ 800 \\
 4 \times 81 = + \quad 324 \\
 \hline
 11\ 124
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6\ 718\ (6700 + 18) \\
 \times \quad 8 \\
 \hline
 8 \times 6\ 700 = 53\ 600 \\
 8 \times 18 = + \quad 144 \\
 \hline
 53\ 744
 \end{array}$$

Сложное делаем легким: продвинутое умножение

$$\begin{array}{r}
 4\ 269\ (4200 + 69) \\
 \times \quad 5 \\
 \hline
 5 \times 4\ 200 = 21\ 000 \\
 5 \times 69 = +\ 345 \\
 \hline
 21\ 345
 \end{array}$$

Овладение навыками умножения «4 на 1» будет означать, что вы готовы возводить в квадрат четырехзначные числа. Попробуем на примере числа 4267. Используя такой же метод, как и при возведении в квадрат двух- и трехзначных чисел, сделаем это с числом 4267, округлив его в меньшую сторону на 267 до 4000 и в большую — на 267 до 4534. Умножим 4534×4000 (задача «4 на 1») и затем прибавим квадрат числа, на которое вы изменили исходное (267^2), как показано ниже.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l}
 +267\ 4\ 534 \\
 -267\ 4\ 000
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{Damage} \\
 18\ 136\ 000\ (4\ 534 \times 4\ 000) \\
 +\ 71\ 289\ (267^2) \\
 \hline
 18\ 207\ 289
 \end{array} \\
 \swarrow \\
 \begin{array}{l}
 +33\ 300 \\
 -33\ 234
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 267^2 \\
 70\ 200\ (300 \times 234) \\
 +\ 1\ 089\ (33^2) \\
 \hline
 71\ 289
 \end{array}
 \end{array}$$

Сейчас уже очевидно, сколько действий происходит внутри этого примера. Я осознаю, что одно дело сказать: «Прибавьте квадрат 267», и совсем другое — сделать это и запомнить число, которое следует приплюсовать. Поэтому, как только умножите 4534×4 и получите 18 136, можете произнести первую часть ответа вслух: «Восемнадцать миллионов...». Вы можете так сказать, потому что исходное число всегда округляется до ближайшей тысячи. Поэтому наибольшее трехзначное число, которое придется возводить в квадрат на следующем

шаге, будет 500. Квадрат 500 равен 250 000. А поскольку остаток вашего ответа (в данном случае 136 000) меньше 750 000, это означает, что число миллионов не изменится.

После того как вы произнесете слова «восемнадцать миллионов...», вам нужно закрепить в памяти число 136 000, прежде чем возводить в квадрат 267. Вот где мнемонические приемы из предыдущей главы придут на помощь! Благодаря фонетическому коду число 136 можно преобразовать в слово *damage* ($1 = d, 3 = m, 6 = j$)*. Теперь смело приступайте к следующей части задачи, просто запомнив *damage* (и существование еще трех нулей в конце числа). Если в какой-то момент посреди вычислений вы забудете изначальную задачу, можете либо бросить взгляд на исходные числа, либо, если они не записаны, попросить аудиторию повторить задание (чтобы создать иллюзию, будто вы заново приступаете к решению, в то время как вы уже сделали некоторые расчеты)!

В результате возведения в квадрат трехзначного числа (изученным ранее способом) вы получите 71 289. Мне раньше было сложно запоминать сотни в ответе (в данном случае 2). Я справился с этим, прибегнув к помощи пальцев (здесь — двух пальцев). Если вы забыли две последние цифры (89), то можете вернуться к исходному числу (4267), возвести последние две цифры в квадрат ($67^2 = 4489$) и взять последние две цифры полученного числа.

Для вычисления итогового ответа нужно прибавить 71 289 к *damage* (то есть к числу 136 000) и их сумму 207 289 уже можно проговорить вслух.

* В соответствии с русским фонетическим кодом число 136 можно представить словом «ретушь». *Прим. ред.*

Томас Фуллер: ученые мужи и большие дураки

Трудно отнять первое место по количеству проблем в обучении у Хелен Келлер*, но темнокожий раб Томас Фуллер, родившийся в Африке в 1710 году, буквально наступает ей на пятки. Он не только был неграмотным, но ни одного дня в своей жизни не учился. Будучи «собственностью» Элизабет Кокс, Томас Фуллер работал на полях Вирджинии. Он сам освоил счет до 100, после чего развил свои «вычислительные способности» путем подсчета предметов, которые всегда под рукой, например зерен в бушелях пшеницы, семян льна и количества волос в коровьем хвосте (2 872 волоска).

Отталкиваясь от простого счета, Фуллер научился вычислять, сколько черепицы потребуется для покрытия крыши дома; сколько столбов понадобится для его ограждения и тому подобные вещи. Его поразительные навыки развивались, а с ними вместе росла его репутация. Уже в преклонном возрасте он принял вызов двух пенсильванцев, согласившись продемонстрировать свои способности в вычислении чисел в уме, причем таких, какие вызвали бы трудности у лучших молниеносных вычислителей. Например, они спросили: «Предположим, фермер имеет шесть свиноматок, каждая из них родит шесть самок в первый год, и все они будут размножаться в той же прогрессии в течение восьми лет; сколько свиноматок в конечном итоге будет иметь фермер?» Задача может быть записана как $7^8 \times 6$, то есть $7 \times 7 \times 6$. Буквально через десять минут Фуллер выдал ответ: 34 588 806.

После его смерти в 1790 году газета *Columbian Centinel* сообщила, что «Фуллер мог вычислить число ярдов, футов,

* Хелен Келлер (1880–1968) — слепоглая американская писательница, общественный деятель и преподаватель. Первый слепоглухой человек, получивший высшее образование. За активную общественную деятельность награждена Президентской медалью Свободы и введена в Зал женской славы. *Прим. ред.*

дюймов и трети дюймов* для любого заданного расстояния, назвать диаметр земной орбиты, а по результатам каждого расчета давал правильный ответ за меньшее время, чем девяносто девять человек из ста сделали бы это на бумаге». Когда Фуллера спросили, жалеет ли он о том, что так и не получил традиционного образования, он ответил: «Нет. Лучшее, что у меня есть, это отсутствие образования: среди многих ученых мужей найдутся большие дураки».

Возведем в квадрат еще одно четырехзначное число: 8431^2 .

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 +431 \quad 8 \quad 862 \\
 8 \quad 431^2 \\
 -431 \quad 8 \quad 000 \\
 \hline
 70 \quad 896 \quad 000 \quad (8 \quad 862 \times 8 \quad 000) \\
 + \quad 185 \quad 761 \quad (431^2) \\
 \hline
 71 \quad 081 \quad 761
 \end{array} \\
 \begin{array}{r}
 \swarrow \quad \searrow \\
 \begin{array}{r}
 +31 \quad 462 \\
 431^2 \\
 -31 \quad 400 \\
 \hline
 184 \quad 800 \quad (400 \times 462) \\
 + \quad 961 \quad (31^2) \\
 \hline
 185 \quad 761
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Foppish

Я не буду повторно описывать все действия, как в последней задаче, обращу ваше внимание лишь на некоторые моменты. После выполнения действия $8 \times 8862 = 70\,896$ становится ясно, что 896 больше 750, поэтому возможен перенос единицы в старший разряд. Действительно, так как 431^2 больше $400^2 = 160\,000$, то определенно нужен перенос единицы во время прибавления числа 431^2 к $896\,000$. Следовательно, на этом этапе можно без опаски произнести вслух: «Семьдесят один миллион...»

* Средний размер ячменного зерна; старинная мера длины. *Прим. пер.*

Сложное делаем легким: продвинутое умножение

При возведении в квадрат 431 получаем 185 761. Складываем 185 и 896, выходит 1081, и произносим остаток ответа. Но помните, что мы уже предвосхитили перенос единицы, поэтому просто скажите: «...81 тысяча...761». Работа выполнена!

На еще один тонкий момент в вычислениях мы укажем в примере 2753^2 .

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l}
 +247 \quad \mathbf{3\ 000} \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \mathbf{2\ 753^2} \\
 \nwarrow \quad \swarrow \\
 -247 \quad \mathbf{2\ 506}
 \end{array}
 \quad \text{Light off} \\
 \mathbf{7\ 518\ 000} \quad (\mathbf{3\ 000} \times \mathbf{2\ 506}) \\
 + \quad \mathbf{61\ 009} \quad (247^2) \\
 \hline
 \mathbf{7\ 579\ 009}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l}
 +47 \quad \mathbf{294} \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \mathbf{247^2} \\
 \nwarrow \quad \swarrow \\
 -47 \quad \mathbf{200}
 \end{array}
 \quad \mathbf{58\ 800} \quad (\mathbf{200} \times \mathbf{294}) \\
 + \quad \mathbf{2\ 209} \quad (47^2) \\
 \hline
 \mathbf{61\ 009}
 \end{array}$$

Так как мы округлили исходное число 2753 до 3000, то будем умножать 3000 на другое число из области «2000 плюс». Можно, конечно, вычесть $2753 - 247 = 2506$, но это сложнее. Чтобы получить последние три цифры этой разности, удвойте 753 — выйдет 1506. Последние три цифры данного результата (506) — это последние три цифры числа «2000 плюс»: 2506! Это прием срабатывает, поскольку сумма двух перемножаемых чисел всегда равна удвоенному исходному числу.

Затем работаем в обычном режиме, перемножив $3000 \times 2506 = 7\ 518\ 000$; преобразуем 518 в слова* *light off* и произносим вслух первую часть ответа: «Семь миллионов...». Здесь это можно утверждать, так как 518 меньше 750, поэтому переноса единицы не будет.

* В соответствии с русским фонетическим кодом число 518 можно представить словом «право». *Прим. ред.*

Далее прибавляем квадрат числа 247. Не забудьте, что 247 можно быстро получить как дополнение для 753. Затем переходим к окончательному ответу, как это сделано в предыдущем примере.

УПРАЖНЕНИЕ: КВАДРАТЫ ЧЕТЫРЕХЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

- | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1. 1234² | 2. 8639² | 3. 5312² |
| 4. 9863² | 5. 3618² | 6. 2971² |

УМНОЖЕНИЕ «3 НА 2»

В ходе решения задач типа «2 на 2» мы уже убедились в существовании нескольких путей решения одного и того же примера. Многообразие методов увеличивается параллельно росту количества цифр в задаче. В случае задач «3 на 2» я предпочитаю «предварительный просмотр» для определения самого оптимального метода расчета.

Методы разложения

Самые легкие задачи типа «3 на 2» — те, в которых двузначные числа можно разложить на сомножители. Например:

$$\begin{array}{r} 637 \\ \times 56 \quad (8 \times 7) \end{array}$$

$$637 \times 56 = 637 \times 8 \times 7 = 5096 \times 7 = 35672$$

Потрясающе, что здесь не нужно ничего складывать. Вы просто представляете 56 как 8×7 , затем решаете пример на умножение типа «3 на 1» ($637 \times 8 = 5096$) и, наконец, пример типа «4 на 1» ($5096 \times 7 = 35672$). Больше не требуется никаких дополнительных действий, и необходимости запоминать промежуточные результаты тоже нет.

Сложное делаем легким: продвинутое умножение

Свыше половины всех двузначных чисел раскладываются на сомножители, среди которых число 11 и меньшие числа. Поэтому данный метод подойдет для многих задач. Вот пример:

$$\begin{array}{r} 853 \\ \times 44 \text{ (} 11 \times 4 \text{)} \end{array}$$

$$853 \times 11 \times 4 = 9383 \times 4 = 37\,532.$$

Чтобы умножить 853×11 , представьте 853 в виде $850 + 3$ и далее рассуждайте так:

$$\begin{array}{r} 850 \times 11 = 9350 \\ 3 \times 11 = + 33 \\ \hline 9383 \end{array}$$

Теперь умножим 9383×4 , представив 9383 как $9300 + 83$, следующим образом:

$$\begin{array}{r} 9\,300 \times 4 = 37\,200 \\ 83 \times 4 = + 332 \\ \hline 37\,532 \end{array}$$

Если двузначное число не раскладывается на сомножители (или они большие), рассмотрите возможность разложения трехзначного числа.

$$\begin{array}{r} 144 \text{ (} 6 \times 6 \times 4 \text{)} \\ \times 76 \end{array}$$

$$76 \times 144 = 76 \times 6 \times 6 \times 4 = 456 \times 6 \times 4 = 2736 \times 4 = 10\,944.$$

Обратите внимание, что последовательность умножений выстроилась из задач типа «2 на 1», «3 на 1» и, наконец, «4 на 1». Это те задачи, которые вы уже умеете решать с легкостью. Поэтому тип примеров «3 на 2» не должен оказаться сложным для вас.

Еще один пример, где не двузначное число подвергается разложению, а трехзначное.

$$\begin{array}{r} 462 \text{ (} 11 \times 7 \times 6 \text{)} \\ \times \underline{53} \end{array}$$

$$53 \times 11 \times 7 \times 6 = 583 \times 7 \times 6 = 4081 \times 6 = 24\ 486.$$

Здесь последовательность задач типа «2 на 2», «3 на 1» и «4 на 1». Но если трехзначное число имеет множитель 11, можно использовать метод умножения на 11 (как описано в главе 4) и получить простой пример типа «2 на 2» ($53 \times 11 = 583$). В данном случае нахождение сомножителя 11 у числа 462 оправдывает себя.

Если двузначное число не раскладывается на «хорошие» сомножители, а трехзначное раскладывается только на сомножители в виде «2 на 1», с задачей все еще можно легко справиться путем умножения типа «2 на 2», а затем «4 на 1», как показано в следующем примере:

$$\begin{array}{r} 423 \text{ (} 47 \times 9 \text{)} \\ \times \underline{83} \end{array}$$

$$83 \times 47 \times 9 = 3901 \times 9 = 35\ 109.$$

Здесь необходимо учесть, что 423 делится на 9 и исходная задача преобразуется в $83 \times 47 \times 9$. В данном случае пример «2 на 2» не настолько прост, но если представить 83 в виде $80 + 3$, получится следующее:

$$\begin{array}{r} 83 \text{ (} 80 + 3 \text{)} \\ \times \underline{47} \\ 80 \times 47 = 3\ 760 \\ 3 \times 47 = +\ 141 \\ \hline 3\ 901 \end{array}$$

Теперь решаем задачу типа «4 на 1» в виде 3901×9 для получения итогового ответа 35 109.

Метод сложения

Когда двух- и трехзначные числа в задаче типа «3 на 2» не поддаются простому разложению, можно прибегнуть к методу сложения.

$$\begin{array}{r} 721 (720 + 1) \\ \times \quad 37 \\ \hline 720 \times 37 = 26\,640 \text{ (представляем } 72 = 9 \times 8) \\ 1 \times 37 = + \quad 37 \\ \hline 26\,677 \end{array}$$

Данный метод предполагает суммирование ответов задач на умножение типа «2 на 2» и «2 на 1». Такого рода задачи включают в себя более сложные элементы (нежели те, которые имеют место в методе разложения), поскольку при решении примера «2 на 1» приходится держать в уме пятизначное число, а затем складывать результаты. Возможно, проще решить эту задачу путем разложения 721 на 103×7 и последующего вычисления $37 \times 103 \times 7 = 3811 \times 7 = 26\,677$.

Вот другой пример:

$$\begin{array}{r} 732 (730 + 2) \\ \times \quad 57 \\ \hline 730 \times 57 = 41\,610 \text{ (представляем } 73 = 70 + 3) \\ 2 \times 57 = + \quad 114 \\ \hline 41\,724 \end{array}$$

Хотя обычно при использовании метода сложения на слагаемые разбивается трехзначное число, порой разбиение двузначного числа более удобно, в особенности если его последние цифры равны 1 или 2, как в следующем примере.

$$\begin{array}{r}
 386 \\
 \times \quad 51 \quad (50 + 1) \\
 \hline
 50 \times 386 = 19\,300 \\
 1 \times 386 = + \quad 386 \\
 \hline
 19\,686
 \end{array}$$

Это превращает задачу «3 на 2» в «3 на 1», делая ее абсолютно легкой, так как второе действие представляет собой умножение на 1. Заметьте, кстати, 5 здесь умножается на четное число, что дает дополнительный 0 в ответе. Поэтому в задаче на сложение надо суммировать только две цифры.

Другой пример умножения 5 на четное число показан в следующей задаче:

$$\begin{array}{r}
 835 \\
 \times \quad 62 \quad (60 + 2) \\
 \hline
 60 \times 835 = 50\,100 \\
 2 \times 835 = + 1\,670 \\
 \hline
 51\,770
 \end{array}$$

При умножении 6 (из 60) на 5 (из числа 835) появляется дополнительный 0 в ответе, что максимально упрощает задачу на сложение.

Метод вычитания

Как и в задачах на умножение типа «2 на 2», иногда проще решить задачу «3 на 2» путем вычитания вместо сложения, как в следующих примерах.

$$\begin{array}{r}
 629 \quad (630 - 1) \\
 \times \quad 38 \\
 \hline
 630 \times 38 = 23\,940 \quad (63 = 9 \times 7) \\
 -1 \times 38 = - \quad 38 \\
 \hline
 23\,902
 \end{array}$$

Сложное делаем легким: продвинутое умножение

$$\begin{array}{r} 758 (760 - 2) \\ \times \quad 43 \\ \hline 760 \times 43 = 32\,680 (43 = 40 + 3) \\ -2 \times 43 = -\quad 86 \\ \hline 32\,594 \end{array}$$

Чтобы сравнить методы вычитания и сложения, применим метод сложения к задаче, которая показана выше.

$$\begin{array}{r} 758 (750 + 8) \\ \times \quad 43 \\ \hline 750 \times 43 = 32\,250 (75 = 5 \times 5 \times 3) \\ 8 \times 43 = +\quad 344 \\ \hline 32\,594 \end{array}$$

Мое предпочтение при ее решении — использование метода вычитания, потому что я всегда стараюсь оставить максимально легкую задачу на сложение или вычитание на самый конец. В данном случае я бы лучше вычел 86, чем прибавил 344, даже притом, что решить задачу типа «2 на 2» (см. выше) методом вычитания немного сложнее, чем методом сложения.

Метод вычитания тоже можно применять для трехзначных чисел, которые меньше кратного 100 или близки к кратному 1000, как в следующих двух примерах.

$$\begin{array}{r} 293 (300 - 7) \\ \times \quad 87 \\ \hline 300 \times 87 = 26\,100 \\ -7 \times 87 = -\quad 609 \\ \hline 25\,491 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 988 (1000 - 12) \\ \times \quad 68 \\ \hline 1000 \times 68 = 68\,000 \\ -12 \times 68 = -\quad 816 (12 = 6 \times 2) \\ \hline 67\,184 \end{array}$$

Последние три цифры ответа получены путем использования дополнения для числа 816.

В следующем примере мы умножили на двузначное число с помощью метода вычитания. Обратите внимание, как мы отняли 736 путем вычитания 1000 и обратного прибавления дополнения:

$$\begin{array}{r}
 736 \\
 \times 59 \text{ (} 60 - 1 \text{)} - 1\,000 \\
 \hline
 60 \times 736 = 44\,160 \\
 -1 \times 736 = -736 \\
 \hline
 43\,424
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 44\,160 \\
 43\,160 \\
 + 264 \text{ (дополнение для 736)} \\
 \hline
 43\,424
 \end{array}$$

**УПРАЖНЕНИЕ: УМНОЖЕНИЕ «3 НА 2»
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ РАЗЛОЖЕНИЯ,
СЛОЖЕНИЯ И ВЫЧИТАНИЯ**

Решите представленные ниже задачи типа «3 на 2» с использованием методов разложения, сложения или вычитания. Разложение, если оно возможно, обычно облегчает задачу. Сверьтесь с ответами в конце книги.

- | | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $\begin{array}{r} 858 \\ \times 15 \end{array}$ | 2. $\begin{array}{r} 796 \\ \times 19 \end{array}$ | 3. $\begin{array}{r} 148 \\ \times 62 \end{array}$ | 4. $\begin{array}{r} 773 \\ \times 42 \end{array}$ |
| 5. $\begin{array}{r} 906 \\ \times 46 \end{array}$ | 6. $\begin{array}{r} 952 \\ \times 26 \end{array}$ | 7. $\begin{array}{r} 411 \\ \times 93 \end{array}$ | 8. $\begin{array}{r} 967 \\ \times 51 \end{array}$ |
| 9. $\begin{array}{r} 484 \\ \times 75 \end{array}$ | 10. $\begin{array}{r} 126 \\ \times 87 \end{array}$ | 11. $\begin{array}{r} 157 \\ \times 33 \end{array}$ | 12. $\begin{array}{r} 616 \\ \times 37 \end{array}$ |
| 13. $\begin{array}{r} 841 \\ \times 72 \end{array}$ | 14. $\begin{array}{r} 361 \\ \times 41 \end{array}$ | 15. $\begin{array}{r} 218 \\ \times 68 \end{array}$ | 16. $\begin{array}{r} 538 \\ \times 53 \end{array}$ |

Сложное делаем легким: продвинутое умножение

$$\begin{array}{r} 17. \quad \mathbf{817} \\ \times \mathbf{61} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 18. \quad \mathbf{668} \\ \times \mathbf{63} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 19. \quad \mathbf{449} \\ \times \mathbf{25} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 20. \quad \mathbf{144} \\ \times \mathbf{56} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21. \quad \mathbf{281} \\ \times \mathbf{44} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 22. \quad \mathbf{988} \\ \times \mathbf{22} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 23. \quad \mathbf{383} \\ \times \mathbf{49} \\ \hline \end{array}$$

Следующие примеры типа «3 на 2» появятся в разделах по возведению в квадрат пятизначных чисел и умножению типа «5 на 5».

$$\begin{array}{r} 24. \quad \mathbf{589} \\ \times \mathbf{87} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 25. \quad \mathbf{286} \\ \times \mathbf{64} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 26. \quad \mathbf{853} \\ \times \mathbf{32} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 27. \quad \mathbf{878} \\ \times \mathbf{24} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28. \quad \mathbf{423} \\ \times \mathbf{45} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 29. \quad \mathbf{154} \\ \times \mathbf{19} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 30. \quad \mathbf{834} \\ \times \mathbf{34} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 31. \quad \mathbf{545} \\ \times \mathbf{27} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32. \quad \mathbf{653} \\ \times \mathbf{69} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 33. \quad \mathbf{216} \\ \times \mathbf{78} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 34. \quad \mathbf{822} \\ \times \mathbf{95} \\ \hline \end{array}$$

ВОЗВЕДЕНИЕ В КВАДРАТ ПЯТИЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

Освоение задач на умножение типа «3 на 2» требует значительно больше практики, но как только вы освоитесь с ними, можете сразу переходить к задачам по возведению пятизначных чисел в квадрат, потому что они упрощаются до умножения типа «3 на 2» плюс возведение в квадрат двух- и трехзначных чисел. Например, чтобы возвести в квадрат число 46 792, можно выполнить следующие действия:

$$\begin{array}{r} \mathbf{46\ 000 + 792} \\ \times \mathbf{46\ 000 + 792} \\ \hline \end{array}$$

Используя распределительный закон, разделим задачу на такие операции:

$$\mathbf{46\ 000 \times 46\ 000 + 2(46\ 000)(792) + 792 \times 792.}$$

Последнее выражение нужно немного упростить:

$$46^2 \times 1 \text{ миллион} + (46)(792)(2000) + 792^2.$$

Но я не решаю подобные задачи в последовательном порядке, а начинаю с середины, потому что задача типа «3 на 2» труднее, чем возведение в квадрат двух- и трехзначных чисел. Итак, в соответствии с принципом «в первую очередь со своего пути убирай сложное», я вычисляю $792 \times 46 \times 2$ и добавляю три нуля в конец результата, то есть выполняю следующие действия:

$$\begin{array}{r} 792 (800 - 8) \\ \times \quad 46 \\ \hline 800 \times 46 = 36\,800 \\ -8 \times 46 = -\,368 \\ \hline 36\,432 \times 2000 = 72\,864\,000 \end{array} \quad \text{Fisher}$$

Используя метод вычитания, как показано выше, вычисляем $792 \times 46 = 36\,432$, затем удваиваем результат для получения 72 864. Применение фонетического кода к числу 864 позволяет хранить его в памяти как *72 Fisher*.

Следующий шаг: подсчитываем $46^2 \times 1\,000\,000$, что равно 2 116 000 000.

На этом этапе вы можете произнести: «Два миллиарда...».

Активизировав в памяти *72 Fisher*, прибавляем к этому числу 116 миллионов, чтобы получить 188 миллионов. Но прежде чем озвучить количество миллионов, нужно проверить, следует ли переносить единицу в старший разряд при сложении *Fisher*, то есть числа 864 и 792^2 . Здесь на самом деле не надо вычислять 792^2 ; достаточно определить, что результат вычисления 792^2 будет довольно большой, чтобы в сумме с 864 000 превысить 1 миллион. (Вы можете предположить это исходя

из того, что $800^2 = 640\,000$, и это число в сумме с $864\,000$ явно превысит 1 миллион.) Таким образом, к 188 надо прибавить единицу и сказать: «...189 миллионов...».

Все еще держа в памяти слово *Fisher*, посчитайте квадрат числа 792, используя метод возведения трехзначных чисел в квадрат (округление в большую и меньшую стороны на 8 и т. д.), чтобы получить 627 264. Наконец, прибавьте 627 к *Fisher*, то есть к числу 864, и получите 1491. Так как мы уже сделали перенос единицы в разряд миллионов, отбросьте первую 1 у числа 1491 и произнесите: «...491 тысяча 264».

Иногда я забываю последние три цифры ответа, поскольку мой мозг полностью поглощен большими вычислениями. Поэтому, перед тем как выполнить итоговое сложение, я сохраняю цифру 2 (из числа 264) на пальцах и стараюсь запомнить 64, что обычно сделать нетрудно, потому что мы имеем склонность к запоминанию того, что слышали недавно. В случае же неудачи я могу восстановить последние две цифры путем возведения в квадрат последних двух цифр исходного числа, то есть $92^2 = 8464$. Последние две цифры этого числа и есть те самые последние две цифры 64. (В качестве альтернативы можно преобразовать число 264 в фонетический код.)

Я сознаю, что процесс вычисления квадрата $46\,792^2$ довольно громоздкий. Представляю вам схему того, как я возводил это число в квадрат:

$$\begin{array}{r}
 \mathbf{792\ (800 - 8)} \\
 \times \quad \mathbf{46} \\
 \hline
 \mathbf{800 \times 46 = 36\ 800} \\
 \mathbf{-8 \times 46 = -\ 368} \qquad \text{Fisher} \\
 \hline
 \mathbf{36\ 432 \times 2000 = 72\ 864\ 000}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 72\ 864\ 000 \\
 46\ 000^2 = + 2\ 116\ 000\ 000 \\
 \hline
 2\ 188\ 864\ 000 \\
 792^2 = + \quad \quad \quad 627\ 264 \\
 \hline
 2\ 189\ 491\ 264
 \end{array}$$

792^2

$\begin{array}{l} +8\ 800 \\ -8\ 784 \end{array}$

$\begin{array}{r} 627\ 200 \\ + \quad \quad 64\ (8^2) \\ \hline 627\ 264 \end{array}$

Рассмотрим другой пример на возведение пятизначного числа в квадрат: $83\ 522^2$.

Как и прежде, вычисляем ответ в таком порядке:

$$83 \times 522 \times 2000, 83^2 \times 1 \text{ миллион, затем } 522^2.$$

В первой задаче обратите внимание на то, что 522 имеет делитель 9. Значит, $522 = 58 \times 9$. Раскладывая 83 как $80 + 3$, получим:

$$\begin{array}{r}
 522\ (58 \times 9) \\
 \times \quad 83 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$83 \times 58 \times 9 = 4814 \times 9 = 43\ 326.$$

Результатом удвоения 43 326 будет число 86 652, что можно запомнить как *86 Julian*. Поскольку $83^2 = 6889$, мы можем произнести: «Шесть миллиардов...»

Сложение $889 + 86 = 975$. Прежде чем произнести «975 миллионов», мы проверяем, не приведет сумма *Julian* (652 000) и квадрата 522^2 к переносу единицы в разряд миллиардов. Приблизительно оценив 522^2 как 270 000 (500×540), убеждаемся, что переноса не будет. Поэтому можно спокойно сказать: «...975 миллионов...».

Наконец, возведение в квадрат 522 обычным способом приведет к числу 272 484, а его сложение с числом *Julian* (652 000) даст последнюю часть ответа: «...924 484».

отдельных цифр, но если разложение найдется, процесс вычисления будет не таким уж и сложным.

$$\begin{array}{r} 829 \\ \times 288 (9 \times 8 \times 4) \end{array}$$

$$829 \times 9 \times 8 \times 4 = 7461 \times 8 \times 4 = 59\,688 \times 4 = 238\,752.$$

Обратите внимание на последовательность действий. Путем разложения 288 на $9 \times 8 \times 4$ мы упрощаем задачу «3 на 3» (829×288) до «3 на 1 на 1 на 1». Далее она превращается в «4 на 1 на 1» ($7461 \times 8 \times 4$) и, наконец, в «5 на 1» для получения итогового ответа 238 752. Прелесть данного решения состоит в отсутствии каких-либо действий на сложение и в том, что ничего не нужно хранить в уме. Добравшись до задачи типа «5 на 1», мы оказались в одном шаге от окончательного ответа.

Задачу типа «5 на 1» можно решить в два действия, если представить 59 688 как $59\,000 + 688$, а затем сложить результаты задач «2 на 1» ($59\,000 \times 4$) и «3 на 1» (688×4), как показано ниже.

$$\begin{array}{r} 59\,688 (59\,000 + 688) \\ \times \quad \quad 4 \\ \hline 59\,000 \times 4 = 236\,000 \\ 688 \times 4 = + 2\,752 \\ \hline 238\,752 \end{array}$$

Если оба трехзначных числа можно разложить на «2 на 1», то задача «3 на 3» упрощается до «2 на 2 на 1 на 1», как в следующем примере.

$$\begin{array}{r} 513 (57 \times 9) \\ \times 246 (41 \times 6) \end{array}$$

$$\begin{aligned} 57 \times 41 \times 9 \times 6 &= 2337 \times 9 \times 6 \\ &= 21\,033 \times 6 \\ &= 126\,198 \end{aligned}$$

Сложное делаем легким: продвинутое умножение

Как обычно, лучше сразу избавиться от трудного элемента задачи, то есть от умножения типа «2 на 2». Как только вы это сделаете, задача будет сведена к «4 на 1», а затем к «5 на 1».

Очень часто бывает так, что раскладывается только один из сомножителей. В таком случае задача сводится к умножению типа «3 на 2 на 1», как в этом примере:

$$\begin{array}{r} 459 (51 \times 9) \\ \times \underline{526} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 526 \times 459 &= 526 \times 51 \times 9 \\ &= 526 \times (50 + 1) \times 9 \\ &= 26\,826 \times 9 \\ &= 241\,434 \end{aligned}$$

Следующая задача «3 на 3» в действительности просто замаскированная задача типа «3 на 2».

$$\begin{array}{r} 624 \\ \times \underline{435} \end{array}$$

Путем удвоения 435 и уменьшения 624 наполовину получаем эквивалентную задачу.

$$\begin{array}{r} 312 (52 \times 6) \\ \times \underline{870 (87 \times 10)} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 87 \times 52 \times 6 \times 10 &= 87 \times (50 + 2) \times 6 \times 10 \\ &= 4524 \times 6 \times 10 \\ &= 27\,144 \times 10 \\ &= 271\,440 \end{aligned}$$

Метод совместной близости

Вы готовы к чему-нибудь попроще? Следующий прием, который был представлен еще в главе 0, основан на такой алгебраической формуле:

$$(z + a)(z + b) = z^2 + za + zb + ab$$

Переписываем ее:

$$(z + a)(z + b) = z(z + a + b) + ab$$

Эта формула справедлива при любых значениях z , a и b . Мы будем пользоваться ею всякий раз, когда трехзначные числа, которые нужно перемножить ($z \times a$ и $z \times b$), находятся близко к легкому числу z (типичный случай, когда число z имеет большое количество нулей). Например, умножим

$$\begin{array}{r} 107 \\ \times 111 \\ \hline \end{array}$$

Будем рассматривать эту задачу как $(100 + 7) \times (100 + 11)$. Задав $z = 100$, $a = 7$, $b = 11$, наша формула даст:

$$100(100 + 7 + 11) + 7 \times 11 = 100 \times 118 + 77 = 11\ 877.$$

Я схематически изобразил решение так:

$$\begin{array}{r} 107(7) \\ \times 111(11) \\ \hline 100 \times 118 = 11\ 800 \\ 7 \times 11 = + \ 77 \\ \hline 11\ 877 \end{array}$$

Числа в скобках равны разностям между исходными числами и нашим подходящим «базовым числом» (здесь $z = 100$). Число 118 получено путем сложения $107 + 11$ или $111 + 7$. По законам алгебры, эти суммы эквивалентны, так как $(z + a) + b = (z + b) + a$.

Сложное делаем легким: продвинутое умножение

На этот раз без лишних слов решим еще один «ускоренный» пример:

$$\begin{array}{r} 109 (9) \\ \times 104 (4) \\ \hline 100 \times 113 = 11\ 300 \\ 9 \times 4 = + \ 36 \\ \hline 11\ 336 \end{array}$$

Метод работает великолепно!

Теперь немного повысим ставки и возьмем большее базовое число.

$$\begin{array}{r} 408 (8) \\ \times 409 (9) \\ \hline 400 \times 417 = 116\ 800 \\ 8 \times 9 = + \ 72 \\ \hline 166\ 872 \end{array}$$

Хотя данный метод, как правило, используется для умножения трехзначных чисел, его также можно применить для задач типа «2 на 2».

$$\begin{array}{r} 78 (8) \\ \times 73 (3) \\ \hline 70 \times 81 = 5\ 670 \\ 8 \times 3 = + \ 24 \\ \hline 5\ 694 \end{array}$$

Здесь базовое число 70 умножается на 81 (78 + 3). В таких задачах даже действие на сложение обычно очень простое.

Этот метод также применим, когда оба числа меньше базового. Как, например, в следующей задаче, где оба числа меньше 400.

Магия чисел

$$\begin{array}{r}
 396 (-4) \\
 \times \underline{387 (-13)} \\
 400 \times 383 = 153\ 200 \\
 -4 \times -13 = \underline{+ 52} \\
 \hline
 153\ 252
 \end{array}$$

Число 383 получено путем вычитания $396 - 13$ или $387 - 4$.
 Данный метод также можно использовать и для задач типа
 «2 на 2», таких как следующие.

$$\begin{array}{r}
 97 (-3) \\
 \times \underline{94 (-6)} \\
 100 \times 91 = 9\ 100 \\
 -3 \times -6 = \underline{+ 18} \\
 \hline
 9\ 118
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 79 (-1) \\
 \times \underline{78 (-2)} \\
 80 \times 77 = 6\ 160 \\
 -1 \times -2 = \underline{+ 2} \\
 \hline
 6\ 162
 \end{array}$$

В следующем примере базовое число по величине находится между перемножаемыми числами.

$$\begin{array}{r}
 396 (-4) \\
 \times \underline{413 (13)} \\
 400 \times = 163\ 600 \\
 409 \\
 -4 \times 13 = \underline{- 52} \\
 \hline
 163\ 548
 \end{array}$$

Число 409 получено в ходе операций $396 + 13$ или $413 - 4$.
 Обратите внимание, что, поскольку числа -4 и 13 имеют

Сложное делаем легким: продвинутое умножение

противоположные знаки, из результата умножения необходимо вычесть 52.

Поднимем ставки еще выше, до уровня, где второе действие требует умножения типа «2 на 2».

$$\begin{array}{r} 621 \text{ (21)} \\ \times 637 \text{ (37)} \\ \hline 600 \times 658 = 394\,800 \\ 21 \times 37 = + 777 \text{ (37} \times 7 \times 3) \\ \hline 395\,577 \end{array}$$

Здесь обратите внимание на то, что первое действие в задаче (600×658) является хорошей оценкой ответа. Но наш метод позволяет перейти от оценки к точному ответу.

$$\begin{array}{r} 876 \text{ (-24)} \\ \times 853 \text{ (-47)} \\ \hline 900 \times 829 = 746\,100 \\ -24 \times -47 = + 1\,128 \text{ (47} \times 6 \times 4) \\ \hline 747\,228 \end{array}$$

Обратите также внимание, что во всех примерах сумма чисел, которые мы перемножаем в первом действии, такая же, как и исходные числа. Например, в задаче выше $900 + 829 = 1729$, как и $876 + 853 = 1729$. Это следует из равенства:

$$z + [(z + a) + b] = (z + a) + (z + b)$$

Поэтому, чтобы получить число, которое надо умножить на 900 (оно будет в диапазоне «800 плюс»), нужно всего лишь взглянуть на последние две цифры суммы $76 + 53 = 129$, чтобы вышло 829.

В следующем примере сложение $827 + 761 = 1588$ подсказывает, что нужно перемножить 800×788 , а затем из полученного результата *вычесть* произведение 27×39 .

$$\begin{array}{r}
 827 (+27) \\
 \times \underline{761 (-39)} \\
 800 \times = 630\ 400 \\
 788 \\
 -39 \times 27 = \underline{-1\ 053 (39 \times 9 \times 3)} \\
 629\ 347
 \end{array}$$

Этот метод настолько эффективен, что если задача типа «3 на 3», над которой вы думаете в настоящий момент, состоит из чисел, далеких друг от друга, то иногда можно видоизменить ее путем деления одного и умножения другого числа на одинаковое число (тем самым сблизив сомножители по величине). Например, задачу 672×157 можно решить следующим образом.

$$\begin{array}{r}
 672 \div 2 = 336 (36) \\
 \times 157 \times 2 = \times \underline{314 (14)} \\
 300 \times 350 = 105\ 000 \\
 36 \times 14 = \underline{+ 504 (36 \times 7 \times 2)} \\
 105\ 504
 \end{array}$$

Когда перемножаемые числа одинаковы, метод совместной близости генерирует такие же вычисления, как и в традиционном методе возведения в квадрат.

$$\begin{array}{r}
 347 (47) \\
 \times \underline{347 (47)} \\
 300 \times 394 = 118\ 200 \\
 47 \times 47 = \underline{+ 2\ 209} \\
 120\ 409
 \end{array}$$

Метод сложения

Когда ни один из предыдущих методов не работает, я ищу возможность использовать метод сложения, в особенности если

Сложное делаем легким: продвинутое умножение

первые две цифры одного из трехзначных чисел просты в разложении. Например, в нижеприведенном примере 64 (первые две цифры числа 641) раскладывается как 8×8 , поэтому я его решаю следующим образом.

$$\begin{array}{r} 373 \\ \times \underline{641} \text{ (} 640 + 1 \text{)} \\ 640 \times 373 = 238\,720 \text{ (} 373 \times 8 \times 8 \times 10 \text{)} \\ 1 \times 373 = + \underline{373} \\ \hline 239\,093 \end{array}$$

По тому же принципу в примере ниже 42 из числа 427 раскладывается как 6×7 , поэтому можно использовать метод сложения, представив 427 в виде $420 + 7$.

$$\begin{array}{r} 656 \\ \times \underline{427} \text{ (} 420 + 7 \text{)} \\ 420 \times 656 = 275\,520 \text{ (} 656 \times 7 \times 6 \times 10 \text{)} \\ 7 \times 656 = + \underline{4\,592} \\ \hline 280\,112 \end{array}$$

Часто я разбиваю последнюю задачу на сложение на два этапа, как показано ниже.

$$\begin{array}{r} 275\,520 \\ 7 \times 600 = + \underline{4\,200} \\ \hline 279\,720 \\ 7 \times 56 = + \underline{392} \\ \hline 280\,112 \end{array}$$

Поскольку задачи, решаемые методом сложения, требуют определенных усилий, обычно я ищу другой способ, который приведет к простым вычислениям в конце процесса решения. Например, задачу, показанную выше, можно решить с помощью разложения. Вот какие действия я бы выполнил:

$$\begin{array}{r} 656 \\ \times \underline{427} \quad (61 \times 7) \end{array}$$

$$\begin{aligned} 656 \times 61 \times 7 &= 656 \times (60 + 1) \times 7 \\ &= 40\,016 \times 7 \\ &= 280\,112 \end{aligned}$$

В самых простых задачах, решаемых методом сложения, одно из чисел содержит 0 в середине числа, как показано ниже.

$$\begin{array}{r} 732 \\ \times \underline{308} \quad (300 + 8) \\ 300 \times 732 = 219\,600 \\ 8 \times 732 = \underline{+ 5\,856} \\ 225\,456 \end{array}$$

Такие задачи, как правило, самые легкие из тех, которые можно решить аналогичным способом. Поэтому стоит приглядеться к задаче типа «3 на 3», чтобы определить возможность ее преобразования в задачу с нулями. Это окупается. Например, в задачу 732×308 можно преобразовать следующие «безнулевые» примеры.

$$\begin{array}{l} 244 \times 3 = 732 \quad \text{или} \quad 366 \times 2 = 732 \\ \times 924 \div 3 = \underline{\times 308} \quad \quad \quad \times 616 \div 2 = \underline{\times 308} \end{array}$$

Мы уже упоминали, что другой способ решения данной задачи сводится к выполнению операций $308 \times 366 \times 2$ и использованию преимущества близости чисел 308 и 366.

Щелкаем еще один «крепкий орешек»:

$$\begin{array}{r} 739 \\ \times \underline{443} \quad (440 + 3) \\ 440 \times 739 = 325\,160 \quad (739 \times 11 \times 4 \times 10) \\ 3 \times 700 = \underline{+ 2\,100} \end{array}$$

Сложное делаем легким: продвинутое умножение

$$\begin{array}{r} 327\ 260 \\ 3 \times 39 = + \underline{117} \\ \hline 327\ 377 \end{array}$$

Метод вычитания

Метод вычитания — это орудие, которое я время от времени применяю, когда одно из трехзначных чисел можно округлить до простого трехзначного числа с нулем на конце, как в следующем примере:

$$\begin{array}{r} 719\ (720 - 1) \\ \times \underline{247} \\ \hline 720 \times 247 = 177\ 840\ (247 \times 9 \times 8 \times 10) \\ -1 \times 247 = \underline{-247} \\ \hline 177\ 593 \end{array}$$

Подобным образом решаем такую задачу:

$$\begin{array}{r} 538\ (540 - 2) \\ \times \underline{346} \\ \hline 540 \times 346 = 186\ 840\ (346 \times 6 \times 9 \times 10) \\ -1 \times 346 = \underline{-692} \\ \hline 186\ 148 \end{array}$$

Метод «когда все остальное не работает»

Когда все остальное не срабатывает, я применяю один очень надежный метод. При его использовании задача на умножение типа «3 на 3» разбивается на 3 части: задача типа «3 на 1», типа «2 на 1» и типа «2 на 2». По мере решения этих задач их ответы суммируются. Такие задачи всегда сложные, особенно если нельзя видеть исходные числа. Во время выступлений с задачами на умножение типа «3 на 3» и «5 на 5» у меня всегда под рукой записанные условия, но все расчеты я произвожу в уме.

Вот пример:

$$\begin{array}{r}
 851 \\
 \times \underline{527} \\
 500 \times 851 = 425\ 500 \\
 27 \times 800 = + 21\ 600 \\
 \quad 447\ 100 \\
 27 \times 51 = + 1\ 377 \\
 \quad \underline{448\ 477}
 \end{array}$$

На практике вычисления выполняются так, как показано ниже. Иногда я использую фонетический код для хранения в памяти тысяч (здесь $447 = \textit{our rug}$) и сотен (здесь 1) — на пальцах.

$$\begin{array}{r}
 851 \\
 \times \underline{527} \\
 5 \times 851 = 4\ 255 \\
 27 \times 8 = + \underline{216} \quad \textit{Our rug} \\
 4\ 471 \times 100 = 447\ 100 \\
 27 \times 51 = + \underline{1\ 377} \\
 \quad \underline{448\ 477}
 \end{array}$$

Решим еще один пример, но на этот раз я разобью на части первое число. (Обычно я так поступаю с бóльшим из чисел, так решить задачу на сложение становится легче.)

$$\begin{array}{r}
 923 \\
 \times \underline{673} \\
 9 \times 673 = 6\ 057 \\
 6 \times 23 = + \underline{138} \quad \textit{Shut up} \\
 6\ 195 \times 100 = 619\ 500 \\
 73 \times 23 = + \underline{1\ 679} \\
 \quad \underline{621\ 179}
 \end{array}$$

УПРАЖНЕНИЕ: УМНОЖЕНИЕ ТИПА «3 НА 3»

- | | | | | | | | | | |
|-----|----------------------------|-----|----------------------------|-----|----------------------------|-----|----------------------------|-----|----------------------------|
| 1. | 644
<u>× 286</u> | 2. | 596
<u>× 167</u> | 3. | 853
<u>× 325</u> | 4. | 343
<u>× 226</u> | 5. | 809
<u>× 527</u> |
| 6. | 942
<u>× 879</u> | 7. | 692
<u>× 644</u> | 8. | 446
<u>× 176</u> | 9. | 658
<u>× 468</u> | 10. | 273
<u>× 138</u> |
| 11. | 824
<u>× 206</u> | 12. | 642
<u>× 249</u> | 13. | 783
<u>× 589</u> | 14. | 871
<u>× 926</u> | 15. | 341
<u>× 715</u> |
| 16. | 417
<u>× 298</u> | 17. | 557
<u>× 756</u> | 18. | 976
<u>× 878</u> | 19. | 765
<u>× 350</u> | | |

Эти задачи встроены в примеры «5 на 5», которые находятся в следующем разделе.

- | | | | | | | | |
|-----|----------------------------|-----|----------------------------|-----|----------------------------|-----|----------------------------|
| 20. | 154
<u>× 423</u> | 21. | 545
<u>× 834</u> | 22. | 216
<u>× 653</u> | 23. | 393
<u>× 822</u> |
|-----|----------------------------|-----|----------------------------|-----|----------------------------|-----|----------------------------|

УМНОЖЕНИЕ «5 НА 5»

Самая большая задача, которую мы попытаемся решить в уме, состоит из двух пятизначных чисел. Для выполнения умножения типа «5 на 5» вам необходимо в совершенстве овладеть навыком решения задач типа «2 на 2», «2 на 3» и «3 на 3» (а также уметь применять фонетический код). Решение задачи «5 на 5» — это просто вопрос сведения воедино всех типов задач, освоенных вами ранее. Как и при возведении в квадрат пятизначных чисел, вы будете использовать распределительный закон для разделения чисел на составные части. Например:

$$\begin{array}{r} 27\ 639\ (27\ 000 + 639) \\ \times\ 52\ 196\ (52\ 000 + 196) \end{array}$$

Основываясь на этом разделении, данную задачу можно разложить на четыре более простые задачи на умножение в стиле «крест-накрест», что я покажу ниже, как задачу типа «2 на 2», две задачи типа «3 на 2» и одну типа «3 на 3». Далее суммируются решения всех этих задач. Вот как это выглядит:

$$\begin{array}{r} (27 \times 52)\ \text{миллионов} \\ +\ [(27 \times 196) + (52 \times 639)]\ \text{тысяч} \\ +\ (639 \times 196) \end{array}$$

Как и при возведении пятизначных чисел в квадрат, я начинаю с середины, берясь за задачу «3 на 2» (как самую трудную):

Mom, no knife

$$1. \quad 52 \times 639 = 52 \times 71 \times 9 = 3692 \times 9 = 33\ 228.$$

Запомнив число 33 228 с помощью мнемоники *Mom, no knife*, далее переключаюсь на вторую задачу типа «3 на 2».

$$2. \quad 27 \times 196 = 27 \times (200 - 4) = 5400 - 108 = 5292.$$

И прибавляю этот результат к числу, которое хранится в памяти.

$$\begin{array}{r} 3. \quad 33\ 228\ (\text{Mom, no knife}) \\ +\ 5\ 292 \\ \hline 38\ 520 \end{array}$$

Получаем новую сумму и сохраняем ее в уме как:

Movie lines (38 миллионов, 520 тысяч)

Запомнив этот мнемонический код, решаем задачу «2 на 2».

4. $52 \times 27 = 52 \times 9 \times 3 = 1\,404$.

На данном этапе уже можно дать частичный ответ. Поскольку задача «2 на 2» — это перемножение миллионов, то 1 404 означает 1 миллиард 404 миллиона. Так как 404 миллиона не подразумевают переноса единицы в разряд миллиардов, то можно спокойно произнести: «Один миллиард...».

5. $404 + \text{Movie (38)} = 442$.

Теперь прибавляем 404 к *movie* (38), получается 442. В этот момент можно сказать «...442 миллиона...». Это можно сделать потому, что на 442 не будет переноса единицы. Чтобы удостовериться в этом, надо посмотреть наперед на задачу типа «3 на 3». Если ее ответ говорит о переносе единицы, то надо сказать «443 миллиона». Но так как результат задачи «3 на 3» (639×196) не превысит 500 000 (что показывает грубая оценка $600 \times 200 = 120\,000$), этого не произойдет.

6. $639 \times 196 = 639 \times 7 \times 7 \times 4 = 4\,473 \times 7 \times 4 = 31\,311 \times 4 = 125\,244$.

Все еще удерживая в голове слово *lines*, решаем задачу «3 на 3» с помощью метода разложения и получаем 125 244. Чтобы запомнить число 244, переводим его в слово *nearer*. Итоговое действие представляет собой простое сложение:

7. $125\,244 + \text{Lines (520\,000)} = 645\,244$.

Это позволяет произнести оставшуюся часть ответа: «...645 244».

Так как один рисунок стоит тысячи слов, вот схема всех выполненных вычислений в данном примере.

$$\begin{array}{r} 27\ 639 \\ \times 52\ 196 \\ \hline \end{array}$$

Mom, no knife

$$639 \times 52 = 33\ 228$$

$$196 \times 27 = + 5\ 292$$

$$38\ 520 \times 1\ 000 = 38\ 520\ 000$$

$$52 \times 27 \times 1\ \text{миллион} = + 1\ 404\ 000\ 000$$

$$1\ 442\ 520\ 000$$

$$639 \times 196 = + 125\ 244$$

$$1\ 442\ 645\ 244$$

Здесь необходимо сделать небольшое замечание о моем предположении, что при решении задачи типа «5 на 5» у вас есть возможность записать ее условие на доске или бумаге. Если такой возможности нет, то вам придется задать мнемонический код для всех четырех чисел (два исходных числа и два промежуточных результата). Например, условие предыдущей задачи можно запомнить в виде слов:

$$\begin{array}{l} 27\ 639 \text{ — Neck jump} \\ \times 52\ 196 \text{ — Lion dopish} \end{array}$$

Потом надо умножить *lion* \times *jump* (52×639), *dopish* \times *neck* (196×27), *lion* \times *neck* (52×27) и, наконец, *dopish* \times *jump* (196×639). Очевидно, эти действия несколько замедлят процесс вычислений, но если вы хотите решать задачи не глядя на их условия, то после тренировок будете в состоянии это делать.

Закончим главу еще одним примером «5 на 5».

$$\begin{array}{r} 79\ 838 \\ \times 45\ 547 \\ \hline \end{array}$$

Последовательность действий в этом примере такая же, как и при решении предыдущего. Начинаем с самой сложной задачи типа «3 на 2» и сохраняем ответ в виде мнемонического кода.

1. $547 \times 79 = 547 \times (80 - 1) = 43\ 760 - 547 = 43\ 213$ —
Rome anatomy.

Затем решаем вторую задачу типа «3 на 2».

2. $838 \times 45 = 838 \times 5 \times 9 = 4190 \times 9 = 37\ 710$.

Суммируем полученное и вверяем итог своей памяти.

3. $43\ 213$ — Rome anatomy
+ 37 710
80 923 — Face Panama

4. $79 \times 45 = 79 \times 9 \times 5 = 711 \times 5 = 3\ 555$.

Результат задачи «2 на 2» дает первую цифру окончательного ответа, которую с уверенностью можно произнести вслух: «Три миллиарда...».

5. $555 + \text{Face (80)} = 635$.

Миллионы в ответе содержат перенос единицы, то есть число 635 надо заменить на 636, потому что к числу *Panama* (923) достаточно прибавить 77 000, чтобы превысить 100 000 и вызвать перенос единицы. А результат задачи «3 на 3» (838×547) с легкостью превысит это значение. Поэтому следует сказать: «...636 миллионов...».

Задача «3 на 3» была посчитана с использованием метода сложения.

$$\begin{array}{r}
 6. \qquad \qquad \qquad 838 \\
 \qquad \qquad \qquad \times \underline{547 (540 + 7)} \\
 540 \times 838 = 452\,520 (838 \times 9 \times 6 \times 10) \\
 7 \times 800 = + \underline{5\,600} \\
 \qquad \qquad \qquad 458\,120 \\
 7 \times 38 = + \underline{266} \\
 \qquad \qquad \qquad 458\,386
 \end{array}$$

На следующем этапе прибавляем этот результат к числу *Panama* (923 000).

$$\begin{array}{r}
 7. \quad 923\,000 \\
 + \underline{458\,386} \\
 1\,381\,386
 \end{array}$$

Так как перенос числа 1 мы уже использовали при получении 636 миллионов, нам осталось лишь проговорить тысячи: «...381 тысяча...386» и насладиться аплодисментами!

Решение данной задачи схематически можно представить следующим образом:

$$\begin{array}{r}
 79\,838 \\
 \times \underline{45\,547} \\
 \text{Rome anatomy} \\
 547 \times 79 = 43\,213 \\
 838 \times 45 = + \underline{37\,710} \\
 \qquad \qquad \qquad 80\,923 \times 1\,000 = 80\,923\,000 \\
 \qquad \qquad \qquad 79 \times 45 \times 1 \text{ миллион} = + \underline{3\,555\,000\,000} \\
 \qquad \qquad \qquad 838 \times 547 = + \underline{458\,386} \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{Face Panama} \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 80\,923\,000 \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + \underline{3\,555\,000\,000} \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 3\,635\,923\,000 \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + \underline{458\,386} \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 3\,636\,381\,386
 \end{array}$$

УПРАЖНЕНИЕ: УМНОЖЕНИЕ «5 НА 5»

$$\begin{array}{cccc}
 1. \quad 65\,154 & 2. \quad 34\,545 & 3. \quad 69\,216 & 4. \quad 95\,393 \\
 \times \underline{19\,423} & \times \underline{27\,834} & \times \underline{78\,653} & \times \underline{81\,822}
 \end{array}$$

Глава 9

Искусство математической магии

Я всегда получал удовольствие от игры с цифрами. Я нахожу арифметику такой же занимательной, как и магию. Но понимание магических секретов арифметики требует знаний алгебры. Конечно, есть и другие причины для ее изучения. Назову лишь несколько: сдача экзаменов, моделирование проблем из реального мира, программирование и возможность понимания высшей математики. Но интерес к алгебре у меня вызвало в первую очередь желание понять некоторые математические трюки. Их я вам сейчас и представлю!

ЭКСТРАСЕНСОРНАЯ МАТЕМАТИКА

Попросите добровольца в аудитории загадать любое число, состоящее из одной-двух цифр. Затем скажите, что никоим образом не можете знать, что это за число, и предложите сделать следующее.

1. Удвойте число.
2. Прибавьте 12.
3. Разделите сумму на 2.
4. Вычтите из нее исходное число.

Спросите: «Думаете ли вы сейчас о цифре 6?» Опробуйте этот трюк сначала на себе и увидите, что данная последовательность вычислений всегда в итоге приводит к цифре 6, какое бы число вы изначально ни выбрали.

Почему это работает

Этот трюк целиком основан на простой алгебре. Я иногда использую его как способ познакомить с алгеброй студентов. Секретное число, выбранное добровольцем, можно обозначить как x . Тогда выполняемые действия представляем так:

1. $2x$ (удвоить число).
2. $2x + 12$ (прибавить 12).
3. $(2x + 12)/2 = x + 6$ (разделить на 2).
4. $x + 6 - x$ (вычесть исходное число).

Не важно, какое число выбрано, итоговый ответ всегда будет 6. При повторении данного приема попросите добровольца прибавить другое число на втором шаге (скажем, 18). Итоговый ответ будет половиной этого числа (а именно 9).

МАГИЯ ЧИСЛА 1089

Следующий трюк существует уже не одно столетие. Сделайте так, чтобы человек из аудитории достал ручку и бумагу:

- 1) и тайно записал трехзначное число, цифры которого идут в порядке уменьшения (например, 851 или 973);
- 2) записал число в обратном порядке и вычел его из исходного числа;
- 3) к полученному ответу добавил его же, только в обратном порядке.

В конце последовательности магическим образом появится ответ 1089, какое бы число ни выбрал доброволец. Например:

$$\begin{array}{r} 851 \\ - 158 \\ \hline 693 \\ + 396 \\ \hline 1089 \end{array}$$

Почему это работает

Независимо от того, какое трехзначное число вы или кто-либо другой выберете в этой игре, окончательный ответ всегда будет равен 1089. Почему? Обозначим abc неизвестное трехзначное число. Алгебраически это эквивалентно:

$$100a + 10b + c.$$

Запись числа в обратном порядке (для вычитания из исходного) дает cba , которое алгебраически равно:

$$100c + 10b + a.$$

После вычитания cba из abc выходит:

$$\begin{aligned} 100a + 10b + c - (100c + 10b + a) &= \\ = 100(a - c) + (c - a) &= 99(a - c). \end{aligned}$$

Поэтому после вычитания на шаге 2 должно получиться одно из следующих чисел, кратных 99: 297, 396, 495, 594, 693, 792 или 891. Каждое из них после прибавления к нему своей перевернутой версии в итоге даст 1089, что мы и видим на шаге 3.

ТРЮК С ПРОПУЩЕННОЙ ЦИФРОЙ

Используя число 1089 из предыдущего примера, вручите добровольцу калькулятор и попросите умножить 1089 на любое трехзначное число, не называя его. (Предположим, он тайно умножил $1089 \times 256 = 278\,784$) Теперь поинтересуйтесь, сколько цифр в полученном ответе. Ответ — 6.

Затем попросите: «Громко назовите пять из этих шести цифр в любом порядке. Я попытаюсь определить недостающую». Предположим, доброволец громко перечисляет: «Два... четыре... семь... восемь... восемь». Вы вежливо говорите ему, что он пропустил цифру 7. Секрет основан на том, что число кратно 9 тогда, и только тогда, когда сумма составляющих его цифр кратна 9. Так как $1 + 0 + 8 + 9 = 18$ кратно 9, значит, число 1089 кратно 9. Поэтому 1089 при умножении на любое целое число даст кратное 9. И раз уж прозвучавшие цифры в сумме дают 29, и следующее кратное 9, большее 29, это 36, то наш доброволец пропустил число 7 (так как $29 + 7 = 36$).

Есть более тонкие способы заставить добровольца в конечном итоге прийти к кратному 9. Вот некоторые из моих любимых.

1. Пусть он наугад выберет шестизначное число, перемешает его цифры, затем отнимет меньшее из шестизначных чисел из большего. Поскольку мы производим вычитание двух чисел с одинаковой модульной суммой (в самом деле, сумма цифр идентична), полученная в итоге разность будет иметь нулевую модульную сумму, следовательно, число будет кратно 9. Далее продолжайте действовать, как было описано выше, чтобы найти недостающую цифру.

2. Пусть он тайно выберет любое четырехзначное число, запишет его в обратном порядке, а потом вычтет меньшее

число из большего. (Получится кратное 9.) Затем пусть умножит результат на 3. Далее, как и раньше, вы ищете пропущенную цифру.

3. Попросите добровольца перемножать разные цифры до тех пор, пока их произведение не превратится в семизначное число. Это не гарантия получения числа, кратного 9, но на практике такую «гарантию» можно получить не меньше чем в 90% случаев (с большой вероятностью перемножаемые цифры будут включать девятки или две тройки, или две шестерки, или 3 и 6). Я часто использую данный способ, выступая перед математически продвинутой публикой, которая может раскусить другие методы.

Однако существует одна проблема, за которой нужно постоянно следить. Предположим, прозвучавшие числа в сумме дают кратное 9 (скажем, 18). После такого ответа у вас не будет возможности определить, пропущен ли 0 или 9. Как справиться с этой ситуацией? Очень просто! Сжуйтеничайте! Просто спросите: «Вы ведь не пропустили 0, не так ли?» Если 0 пропущен, то вы успешно провернули свой трюк. Если нет, скажите: «Ой, просто показалось, что вы отвлеклись! Вы не пропустили один, два, три или четыре, не так ли?» Доброволец либо покачает головой, либо скажет «нет». Затем вы продолжаете: «Как и не пропустили пять, шесть, семь или восемь. Вы не включили девять, не так ли?» Доброволец ответит утвердительно, а вы получите заслуженные аплодисменты!

СЛОЖЕНИЕ-ЧЕХАРДА

Этот прием сочетает в себе быстрые вычисления в уме и поразительные предсказания. Вручите зрителю карту с расчерченными на ней десятью линиями, пронумерованными от 1 до 10.

Пусть он загадает два положительных числа от 1 до 20 и подпишет ими линии 1 и 2. Далее попросите его записать сумму 1-й и 2-й линий на линии 3. Затем сумму линии 2 и 3 на линии 4 и так далее, как проиллюстрировано ниже.

1	<u>9</u>
2	<u>2</u>
3	<u>11</u>
4	<u>13</u>
5	<u>24</u>
6	<u>37</u>
7	<u>61</u>
8	<u>98</u>
9	<u>159</u>
10	<u>257</u>

Пусть зритель покажет вам карту. Вы сразу же можете назвать ему сумму всех чисел на ней. Например, в нашем случае вы могли бы мгновенно объявить, что числа в сумме дают 671 (быстрее, чем зритель подсчитал бы это с калькулятором). В качестве приза вручите зрителю калькулятор и попросите его разделить число на линии 10 на число с линии 9. В данном примере получится частное $257/159 = 1,616$. Пусть он произнесет первые три цифры частного, а после перевернет карточку (там вы уже написали свое предсказание). Он будет очень удивлен увиденным 1,61!

Почему это работает

Для выполнения быстрого расчета нужно просто умножить число с линии 7 на 11. Здесь $61 \times 11 = 671$. Причина эффективности этого приема проиллюстрирована в таблице ниже. Если

обозначить числа на линиях 1 и 2 как x и y соответственно, а затем просуммировать числа на всех линиях от 1 до 10, то в итоге выйдет $55x + 88y$, что составляет $11 \times (5x + 8y)$. А это равно произведению числа 11 на число на линии 7.

1	x
2	y
3	$x + y$
4	$x + 2y$
5	$2x + 3y$
6	$3x + 5y$
7	$5x + 8y$
8	$8x + 13y$
9	$13x + 21y$
10	$21x + 34y$
Всего	$55x + 88y$

Что касается прогнозирования, то здесь используется тот факт, что для любых положительных чисел a, b, c, d , если $a/b < c/d$, то значение дроби, которая получается путем «ошибочного сложения дробей» (то есть путем сложения числителей и сложения знаменателей), будет лежать между двумя исходными дробями. Другими словами, применяем неравенства:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Таким образом, частное от деления числа на линии 10 на число на линии 9, $(21x + 34y)/(13x + 21y)$, должно быть между

$$1,615 \dots = \frac{21x}{13x} < \frac{21x + 34y}{13x + 21y} < \frac{34y}{21y} = 1,619 \dots$$

Следовательно, частное должно начинаться с цифр 1,61, как и было предсказано.

По сути, если продолжать такую «чехарду» до бесконечности, отношение последовательно идущих значений будет все ближе подбираться к значению

$$\frac{1 + \sqrt{15}}{2} \approx 1,6180339887 \dots$$

Это число с настолько огромным количеством удивительно красивых и загадочных свойств, что его часто называют золотым отношением (золотым сечением).

МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ

Вы готовы к испытанию совершенно иного рода? Ниже размещен пример «магического квадрата». Сколько же о нем было написано еще во времена Древнего Китая! Но мы расскажем о способе создания магических квадратов в развлекательном стиле. Эту заученную схему я исполнял годами.

Я показываю визитку со следующей надписью на задней стороне:

8	11	14	1
13	2	7	12
3	16	9	6
10	5	4	15

= 34

И говорю: «Перед вами магический квадрат. Это самый маленький магический квадрат, который можно создать, используя числа от одного до шестнадцати. Здесь суммы чисел в каждой строке и каждом столбце дают одно и то же число — тридцать четыре. Я провел весьма широкое исследование на тему магических квадратов, поэтому предлагаю создать один прямо на ваших глазах».

Затем я прошу кого-либо из аудитории назвать любое число больше 34. Предположим, это будет 67. После достаю еще одну визитку, рисую пустую сетку «4 на 4» и помещаю число 67 справа от нее. Далее прошу человека указывать на квадраты по одному, в любом порядке. Как только он указывает на пустую клетку, я незамедлительно записываю в нее число. Конечный результат выглядит так:

16	19	23	9	= 67
22	10	15	20	
11	25	17	14	
18	13	12	24	

Я продолжаю: «В случае с первым магическим квадратом каждая строка и каждый столбец при сложении давали тридцать четыре. (На этом этапе я обычно откладываю карточку с квадратом в сторону.) Теперь посмотрим, что у нас получилось с новым квадратом». Убедившись, что элементы каждой строки и каждого столбца действительно дают в сумме 67, я говорю: «Но я не останавливаюсь на этом. Специально для вас я решил пойти еще на один шаг дальше. Обратите внимание, что обе диагонали при сложении дают шестьдесят семь!» Затем я указываю на то, что сумма четырех квадратов

в левом верхнем углу тоже равна 67 ($16 + 19 + 22 + 10 = 67$), как и остальных квадратов такого же размера! «Они все в сумме равны шестидесяти семи. Но не верьте мне на слово. Пожалуйста, оставьте себе магический квадрат в качестве сувенира и проверьте его потом сами!»

КАК СОСТАВИТЬ МАГИЧЕСКИЙ КВАДРАТ

Вы можете создать магический квадрат, который при суммировании давал бы любое число, воспользовавшись исходным магическим квадратом с суммой 34. Держите его при этом на виду. Пока вы чертите сетку «4 на 4», устно выполните следующие вычисления.

1. Вычтите 34 из заданного числа (например, $67 - 34 = 33$)
2. Разделите полученное число на 4 (например, $33/4 = 8$ с остатком 1)
Частное — это первое «магическое» число. Частное плюс остаток — второе «магическое» число. (Здесь магические числа 8 и 9.)
3. Когда доброволец указывает на пустой квадрат, незаметно взгляните на квадрат 34, чтобы узнать, какой квадрат ему соответствует. Если это квадрат с числами 13, 14, 15 или 16, прибавьте к ним второе число (в нашем примере 9). Если нет, то прибавьте первое магическое число (8).
4. Вставляйте подходящее число до тех пор, пока не закончите составление магического квадрата.

Обратите внимание: когда заданное число четное, но не кратное 4, ваши первое и второе магические числа будут одинаковыми. Так что у вас будет только одно магическое число для прибавления его к числам из квадрата 34.

Почему это работает

Этот метод работает потому, что каждая строка, столбец и диагональ из исходного магического квадрата при сложении дают 34. Предположим, заданное число 82. Так как $82 - 34 = 48$ (и $48/4 = 12$), то следует прибавлять 12 к каждому числу в каждой ячейке исходного магического квадрата. В результате каждая «группа четверок», которая до этого равнялась 34, будет при сложении давать $34 + 48 = 82$. Можете убедиться в этом на примере следующего магического квадрата.

20	23	26	13
25	14	19	24
15	28	21	18
22	17	16	27

= 82

С другой стороны, если бы заданным числом было 85, магическими числами были бы 12 и 15. Поэтому мы прибавим 15 к квадратикам, которые содержат числа 13, 14, 15 и 16. Так как каждые строка, столбец и квадрат «2 на 2» содержат одно из этих чисел, то каждая группа из 4 клеток будет при сложении давать $34 + 12 \times 3 + 15 = 85$, как в следующем магическом квадрате.

20	23	29	13
28	14	19	24
15	31	21	18
22	17	16	30

= 85

В качестве интересного математического пустячка позвольте отметить еще одно удивительное свойство знаменитого магического квадрата «3 на 3», показанного ниже.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

= 15

В нем не только строки, столбцы и диагонали дают в сумме 15, но если вы представите строки магического квадрата как трехзначные числа, то сможете удостовериться с помощью калькулятора, что $492^2 + 357^2 + 816^2 = 294^2 + 753^2 + 618^2$. Так же как $438^2 + 951^2 + 276^2 = 834^2 + 159^2 + 672^2$. Если вам любопытно, почему так происходит, вы найдете ответ в моей статье Magic «Squares» Indeed! («В самом деле “магические” квадраты!»), ссылка на которую дана в библиографии.

БЫСТРЫЕ КУБИЧЕСКИЕ КОРНИ

Попросите кого-нибудь выбрать двузначное число, но не называть его. Затем попросите возвести это число в куб, то есть умножить само на себя трижды, используя калькулятор. Например, если секретное число 68, пусть доброволец вычислит $68 \times 68 \times 68 = 314\,432$ и назовет ответ. Как только он произнесет его вслух, вы можете мгновенно раскрыть секрет исходного числа — это кубический корень 68. Как это делается?

Чтобы быстро вычислять кубические корни, нужно выучить кубы чисел от 1 до 10.

$$1^3 = 1$$

$$2^3 = 8$$

$$\begin{aligned}3^3 &= 27 \\4^3 &= 64 \\5^3 &= 125 \\6^3 &= 216 \\7^3 &= 343 \\8^3 &= 512 \\9^3 &= 729 \\10^3 &= 1000\end{aligned}$$

Как только вы запомните эти значения, вычислять кубические корни станет так же легко, как и назвать значение числа π . Приведем пример.

Чему равен кубический корень из 314 432?

Кажется, что это довольно сложное задание для начала, но не паникуйте, на самом деле оно довольно простое. Как обычно, будем двигаться постепенно.

1. Посмотрите на величину тысяч, 314 в данном примере.
2. Поскольку 314 лежит между $6^3 = 216$ и $7^3 = 343$, то кубический корень находится в диапазоне «60 плюс» (так как $60^3 = 216\ 000$ и $70^3 = 343\ 000$). Следовательно, первая цифра кубического корня будет 6.
3. Для определения последней цифры заметьте, что только куб числа 8 оканчивается на 2 ($8^3 = 512$), так что последней цифрой будет 8.

Поэтому кубический корень из 314 432 равен 68. Три простых шага — и вы у цели. Обратите внимание, что каждая цифра от 0 до 9 появляется по одному разу в виде последней цифры куба.

А теперь попрактикуйтесь.

Чему равен кубический корень из 19 683?

1. 19 находится между 8 и 27 (2^3 и 3^3).
2. Следовательно, кубический корень лежит в диапазоне «20 плюс».
3. Последняя цифра в задаче 3, что соответствует $343 = 7^3$, значит, 7 и будет последней цифрой.

Ответ: 27.

Обратите внимание, что наши выводы по поводу последней цифры работают только тогда, когда исходное число является кубом *целого числа*. Например, кубический корень из 19 684 будет 27,0004572... Определенно не 27. Вот почему эта тема включена в раздел математической магии, а не в более ранние главы. (Кроме того, расчеты производятся настолько быстро, что кажется, будто без магии не обошлось!)

УПРОЩЕННЫЕ КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

Квадратные корни так же просто вычислить, если задан полный квадрат. Например, если кто-то сказал вам, что квадрат двузначного числа равен 7569, то вы в состоянии мгновенно ответить, что исходное число (квадратный корень) равно 87. Вот как это делается.

1. Посмотрите на величину сотен (цифры, предшествующие последним двум) в данном примере.
2. Так как 75 находится между $8^2 (8 \times 8 = 64)$ и $9^2 (9 \times 9 = 81)$, то нам известно, что квадратный корень будет где-то в диапазоне «80 плюс». Следовательно, его первая цифра 8. Существует два числа, квадраты которых заканчиваются на 9: $3^2 = 9$, $7^2 = 49$. Поэтому последняя цифра квадратного корня должна равняться 3 или 7. Таким образом, квадратный корень равен либо 83, либо 87. Какой из них?

3. Сравните исходное число с квадратом числа 85 (который можно легко посчитать как $80 \times 90 + 25 = 7225$). Так как 7569 больше, чем 7225, квадратный корень будет бóльшим числом, то есть 87.

Решим еще один пример.

Чему равен квадратный корень из 4761?

Поскольку 47 лежит между $6^2 = 36$ и $7^2 = 49$, ответ должен находиться в диапазоне «60 плюс». Если последняя цифра квадрата равна 1, то последняя цифра квадратного корня должна быть 1 или 9. Так как 4761 больше $65^2 = 4225$, то квадратный корень должен равняться 69. Как и с предыдущим трюком для кубического корня, этот метод можно использовать только тогда, когда исходное число является полным квадратом.

УДИВИТЕЛЬНАЯ СУММА

Следующий трюк мне впервые показал Джеймс Рэнди, который эффективно использовал его в своей магии. В нем волшебник предсказывает сумму четырех случайно выбранных трехзначных чисел.

Чтобы подготовить такой фокус, понадобятся три колоды из девяти карт каждая и лист бумаги с записанным числом 2247, который вы запечатаете в конверт. Далее над каждым комплектом карт произведите следующие действия.

На колоде А запишите такие цифры (одно на каждую карту):

4286 5771 9083 6518 2396 6860 2909 5546 8174

На колоде Б запишите числа:

5792 6881 7547 3299 7187 6557 7097 5288 6548

На колоде В запишите следующие числа:

2708 5435 6812 7343 1286 5237 6470 8234 5129

Выберите троих человек из аудитории и вручите им по колоде карт. Пусть каждый из них наугад вытащит оттуда одну карту. Допустим, это карты с числами 4286, 5792 и 5435. Теперь, соблюдая очередность, пусть каждый громко назовет одну из цифр четырехзначного числа: сначала человек А, потом человек Б и, наконец, человек В. Скажем, они назвали цифры 8, 9 и 5. Запишите их (получится число 895) и скажите: «Вы должны признать, что данное число — результат абсолютно случайного выбора и его нельзя заранее предсказать».

Далее пусть три человека назовут другие цифры своих карт. Скажем, 4, 5 и 3. Запишите 453 ниже числа 895. Затем повторите данную процедуру еще два раза для двух оставшихся чисел, получив в итоге четыре трехзначных числа, например:

А	Б	В
8	9	5
4	5	3
2	2	4
6	7	5
2	2	4
7	4	7

Затем пусть кто-нибудь сложит эти четыре числа и назовет сумму. А дальше пусть кто-то откроет конверт и покажет ваше предсказание. Теперь наслаждайтесь аплодисментами!

Почему это работает

Взгляните на числа на картах каждой колоды и подумайте, прослеживается ли в них какая-либо последовательность. Каждый набор чисел в сумме дает одинаковую величину. Сумма цифр каждого числа колоды А равна 20. Сумма цифр каждого числа

колоды Б — 23. И сумма цифр каждого числа колоды В равна 17. Поскольку цифры из колоды В, которые в правом столбике, всегда в сумме дают 17, то в итоговой сумме в разряде единиц можно записать 7 и запомнить перенос 1 в следующий разряд. Так как цифры из колоды Б в сумме дают 23, то в итоговой сумме в разряде десятков можно записать 4 ($3 + 1$) и запомнить перенос 2 в следующий разряд. Наконец, цифры из колоды А в сумме дают 20, поэтому после прибавления 2 получим итоговую сумму 2247!

ДЕНЬ ДЛЯ ЛЮБОЙ ДАТЫ

Мы завершим нашу книгу одним из проверенных временем подвигов ментальных вычислений — определением дня недели, на который приходится чей-либо день рождения. Это действительно очень практический навык. Вряд ли вас каждый день кто-то будет просить возвести в квадрат трехзначное число, но почти ни один день не проходит без того, чтобы кто-то не упоминал дату из прошлого или будущего. Всего лишь немного практики, и вы сможете быстро и легко определять день недели практически любой исторической даты.

Сначала присвоим кодовый номер каждому дню недели. Их легко запомнить.

Число	День недели
1	Понедельник
2	Вторник
3	Среда
4	Четверг
5	Пятница
6	Суббота
7 или 0	Воскресенье

Далее нам понадобится код для каждого месяца. Эти коды применимы для любого года за исключением високосных. Для високосного года (например, 2000, 2004, 2008 и т. д.) кодом для января будет 5, а для февраля — 1.

Месяц	Код	Мнемоника
Январь	6*	Слово «январь» состоит из 6 букв
Февраль	2*	2-й месяц года
Март	2	2 звука (Р-Т) после «Ма»
Апрель	5	А-П-Р-Е-ЛЬ — 5 звуков
Май	0	0 звуков после «Май»
Июнь	3	И-Ю-НЬ — 3 звука
Июль	5	«Июль — макушка лета», 5 слогов в «ма-куш-ка ле-та»
Август	1	«Август» начинается с буквы А — 1-й буквы алфавита
Сентябрь	4	Просто запомни цифру 4
Октябрь	6	О-К-Т-Я-Б-РЬ — 6 звуков
Ноябрь	2	2 слога в слове «но-ябрь»
Декабрь	4	Начало четвертого сезона года или 4 согласные буквы в слове

* В високосный год код января 5, код февраля 1.

Теперь вычислим день недели для любой даты в 2006 году. После этого опишем 2007 год, затем 2008-й и т. д., до конца вашей жизни. Когда все даты из будущего будут определены, мы заглянем в прошлое и вычислим дни недели для любой даты из 1900-х или любого другого века.

Каждому году присвоен кодовый номер, и в случае 2006 года таковым будет 0 (см. таблицу ниже).

Чтобы вычислить день недели, нужно просто сложить код месяца, день месяца (дата) и код года. Таким образом, для 3 декабря 2006 года рассчитываем

$$\text{Код месяца} + \text{Дата} + \text{Код года} = 4 + 3 + 0 = 7.$$

Следовательно, эта дата приходится на 7-й день недели, то есть воскресенье.

Что вы скажете о 18 ноября 2006 года? Поскольку код ноября — 2, имеем:

$$\text{Код месяца} + \text{Дата} + \text{Код года} = 2 + 18 + 0 = 20.$$

Так как дни недели повторяются каждые семь дней, нужно от ответа (20) отнять любое кратное 7 (то есть 7, 14, 21, 28, 35, . . .), и это никак не повлияет на номер дня недели. Итак, заключительное действие сводится к вычитанию из полученной суммы наибольшего кратного 7. В данном случае получаем $20 - 14 = 6$. Следовательно, 18 ноября 2006 года приходится на субботу.

Что можно сказать о 2007 годе? Точнее, что происходит с вашим днем рождения при переходе от одного года к следующему? Большинство годов состоят из 365 дней, а так как $365 = 7 \times 52 + 1$, то день недели вашего рождения сдвинется на один день вперед. Если между вашими днями рождения 366 дней, то день недели вашего рождения сдвинется на два дня вперед. Поэтому для 2007 года мы вычисляем день недели как и раньше, но применяем код года, равный 1. Далее следует 2008 год — високосный. (Високосный год бывает раз в четыре года, так что 2000, 2004, 2008, 2012... 2096 — високосные годы XXI века.) Поэтому для 2008 года его код увеличивается на два и равен 3. Следующий 2009 год не високосный, поэтому код увеличивается на 1 (и равен 4).

Таким образом, для 2 мая 2007 года, например, имеем:

$$\text{Код месяца} + \text{Дата} + \text{Код года} = 0 + 2 + 1 = 3.$$

Следовательно, данная дата приходится на среду.

Для 9 сентября 2008 года имеем:

$$\text{Код месяца} + \text{Дата} + \text{Код года} = 4 + 9 + 3 = 16.$$

Отнимая наибольшее кратное 7, получаем $16 - 14 = 2$, значит, эта дата приходится на вторник.

Но для 16 января 2008 года, поскольку этот год високосный, код месяца январь будет равен 5, а не 6. Поэтому:

$$\text{Код месяца} + \text{Дата} + \text{Код года} = 5 + 16 + 3 = 24,$$

и, следовательно, нужная дата попадает на день $24 - 21 = 3$, который является средой.

Мы перечислили все коды для каждого года XXI века в следующей таблице. Но вам не нужно запоминать ее. Можно устно посчитать код для любого года в промежутке от 2000 до 2099. Для определения кода года $2000 + x$ берем частное $x/4$ (игнорируя остаток) и прибавляем его к x . Код года можно уменьшить путем вычитания из него кратного 7.

Год	Код	Год	Код	Год	Код	Год	Код
2000	0	2025	3	2050	6	2075	2
2001	1	2026	4	2051	0	2076	4
2002	2	2027	5	2052	2	2077	5
2003	3	2028	0	2053	3	2078	6
2004	5	2029	1	2054	4	2079	0
2005	6	2030	2	2055	5	2080	2
2006	0	2031	3	2056	0	2081	3
2007	1	2032	5	2057	1	2082	4

<u>Год</u>	<u>Код</u>	<u>Год</u>	<u>Код</u>	<u>Год</u>	<u>Код</u>	<u>Год</u>	<u>Код</u>
2008	3	2033	6	2058	2	2083	5
2009	4	2034	0	2059	3	2084	0
2010	5	2035	1	2060	5	2085	1
2011	6	2036	3	2061	6	2086	2
2012	1	2037	4	2062	0	2087	3
2013	2	2038	5	2063	1	2088	5
2014	3	2039	6	2064	3	2089	6
2015	4	2040	1	2065	4	2090	0
2016	6	2041	2	2066	5	2091	1
2017	0	2042	3	2067	6	2092	3
2018	1	2043	4	2068	1	2093	4
2019	2	2044	6	2069	2	2094	5
2020	4	2045	0	2070	3	2095	6
2021	5	2046	1	2071	4	2096	1
2022	6	2047	2	2072	6	2097	2
2023	0	2048	4	2073	0	2098	3
2024	2	2049	5	2074	1	2099	4

Например, для 2061 года имеем $61/4 = 15$ (с остатком 1, который не учитывается). Тогда код 2061 года составит $61 + 15 = 76$. Или сокращенно $76 - 70 = 6$.

Следовательно, для 19 марта 2061 получается:

$$\text{Код месяца} + \text{Дата} + \text{Код года} = 2 + 19 + 6 = 27.$$

Результат вычитания $27 - 21 = 6$ говорит о том, что эта дата придется на субботу.

Что можно сказать о днях рождения между 1900 и 1999 годами? В этом случае задачу следует решать точно так же, как и предыдущие, но передвинуть итоговый ответ на один день вперед (или просто прибавить 1 к коду года). Тогда 19 марта 1961 года — это воскресенье.

Для даты 3 декабря 1998 года имеем $98/4 = 24$ (с остатком 2, который не берем в расчет). Отсюда код 1998 года равен $98 + 24 + 1 = 123$, где «плюс один» применяется ко всем номерам годов, больших 1900. Далее вычитаем наибольшее кратное 7. Для удобства приведем числа, кратные 7, которые могут вам понадобиться:

**7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98, 105,
112, 119, 126...**

Так как $123 - 119 = 4$, код 1998 года будет 4. Следовательно, для 3 декабря 1998 года имеем:

Код месяца + Дата + Код года = 5 + 16 + 3 = 24

и $11 - 7 = 4$, так что эта дата приходится на четверг.

Для дат годов, больших 1800 и меньших 1900, нужно прибавлять 3 к коду соответствующего года из XXI века. Например, Чарльз Дарвин и Авраам Линкольн родились 12 февраля 1809 года. Так как код 2009 года — 4, то 1809-й будет иметь код $4 + 3 = 7$, который можно сократить до нуля. Таким образом, для 12 февраля 1809 будет

Код месяца + Дата + Код года = 2 + 12 + 0 = 14

и $14 - 14 = 0$, значит, оба родились в воскресенье.

Для дат 2100-х годов (то есть дат XXII столетия) следует прибавить 5 к коду соответствующего года XXI века (или вычесть из него 2, что эквивалентно). Например, код 2009 года равен 4, тогда 2109 год имеет код $4 + 5 = 9$, который после вычитания 7 идентичен коду года 2.

Даты 1700-х годов (XVIII столетие) рассчитываются так же, как даты XXII века (путем прибавления 5 или вычитания 2), но здесь нужно быть внимательным. В то время был принят

григорианский календарь, созданный в 1582 году. Но он не был официально принят англичанами (и американскими колониями) вплоть до 1752 года, когда среда 2 сентября вдруг стала четвергом 14 сентября. Удостоверимся, что 14 сентября 1752 года в самом деле было четвергом. Так как код 2052 года равен 2 (посмотрите в таблице выше или посчитайте $52 + 13 - 63 = 2$), то 1752 год будет иметь код 0. Отсюда для 14 сентября 1752 года получаем:

$$\text{Код месяца} + \text{Дата} + \text{Код года} = 4 + 14 + 0 = 18$$

и $18 - 14 = 4$, что действительно означает четверг. Однако наша формула не сработает для более ранних дат (которые исчислялись по юлианскому календарю)*.

Наконец, отметим, что в соответствии с григорианским календарем високосный год наступает раз в четыре года, за исключением тех годов, которые делятся на 100, хотя есть и исключение из исключения: годы, делимые на 400, тоже являются високосными. Так, 1600, 2000, 2400 и 2800 годы будут високосными, а 1700, 1800, 1900, 2100, 2200, 2300 и 2500-й — нет. По сути, григорианский календарь повторяет себя каждые 400 лет, так что вы можете преобразовать любую дату из будущего в дату около 2000 года. Например, 19 марта 2361 года и 19 марта 2761 года придутся на тот же день недели, что и 19 марта 1961 года, которое мы ранее уже определили как воскресенье.

* При пересчете дат с юлианского календаря на григорианский необходимо учитывать, что разные страны переходили на григорианский календарь в разные сроки. Так, Россия перешла на этот календарь в 1918 году, когда за 31 января 1918 года сразу последовало 14 февраля того же года. А континентальный Китай ввел григорианский календарь только в 1949 году. *Прим. ред.*

УПРАЖНЕНИЕ: ДЕНЬ ДЛЯ ЛЮБОЙ ДАТЫ

Определите день недели для следующих дат.

1. 19 января 2007 г.
2. 14 февраля 2012 г.
3. 20 июня 1993 г.
4. 1 сентября 1983 г.
5. 8 сентября 1954 г.
6. 19 ноября 1863 г.
7. 4 июля 1776 г.
8. 22 февраля 2222 г.
9. 31 июня 2468 г.
10. 1 января 2358 г.

Эпилог: как математика помогает задуматься о странных вещах

Как издатель журнала Skeptic и исполнительный директор Сообщества скептиков, редактор журнала Scientific American и ведущий ежемесячной колонки «Скептик», я получаю множество писем от людей, которые бросают мне вызов, рассказывая истории о своем необычном опыте, — например, о домах с привидениями, призраках, предсмертном и внетелесном опыте, НЛО, похищениях инопланетянами, предчувствии смерти во сне и многом другом. Самые интересные истории для меня те, которые повествуют о невероятных событиях. В этих посланиях обычно кроется такой смысл: если я не могу предложить удовлетворительного *естественного* объяснения для данного конкретного случая, то общий принцип *сверхъестественного* сохраняется. Типичная история: человеку снится смерть друга или родственника, а на следующий день ему по телефону сообщают об этом. «Каковы шансы такого совпадения?» — спрашивают меня.

Вот здесь математика и помогает в аргументировании. Я не собираюсь с важным видом вещать о том, как школьный курс математики учит людей критически мыслить, потому что об этом твердит, вероятно, почти каждый учитель математики в каждом классе почти каждой школы (хотя бы раз в год).

Я просто хочу привести несколько конкретных примеров того, как я использую математику, которая помогает мне в процессе работы объяснять, почему с людьми происходят столь странные вещи.

Хотя я не всегда могу истолковать какие-то конкретные случаи, вероятностный принцип, называемый «законом больших чисел», показывает, что событие с низкой вероятностью появления при небольшом количестве испытаний имеет высокую вероятность появления при большом количестве испытаний. Или, как я люблю говорить, «один шанс на миллион реализуется в США 295 раз на день».

Начнем с предчувствия смерти. Я произвел такие «предварительные» расчеты. Психологи говорят, что среднестатистический человек видит около пяти снов в сутки, что равняется 1825 снам в год. Даже если мы запомним только один из десяти, это все равно будет 182,5 отложенных в памяти снов в год. У нас в стране проживает 295 миллионов человек, стало быть, они запомнят 53,8 миллиарда снов в течение года. Антропологи и социологи утверждают, что каждый из нас довольно хорошо знаком со 150 людьми (то есть среднестатистический человек держит в своей адресной книге около 150 имен, о каждом носителе которого может знать нечто существенное). Это свидетельствует о наличии сети контактов размером 44,3 миллиарда межличностных отношений среди 295 миллионов американцев. Ежегодный уровень смертности в США (любая причина, любой возраст) составляет 0,008, или 2,6 миллиона в год. Неизбежно, что какой-то из этих 53,8 миллиарда запомнившихся снов придется на какую-то из этих 2,6 миллионов смертей среди 295 миллионов американцев с их 44,3 миллиардами связей. *На самом деле было бы чудом, если бы ни один из этих снов — «предвестников смерти» не исполнился.*

Даже если мои подсчеты ошибочны, грубо ошибочны, вывод из них не меняется. Каковы шансы, что предчувствие смерти воплотится в реальность? Очень даже высокие.

Существует дополнительный психологический фактор, называемый «смещение, обусловленное необходимостью аргументации выбранной точки зрения», или «предвзятость подтверждения» (то самое состояние, когда мы замечаем наши попадания и игнорируем промахи, опираясь на поддержку своих любимых убеждений). Такая предвзятость подтверждения объясняет, как работают, например, теории заговора. Люди, которые верят в теории заговора (например, что теракт 11 сентября 2001 года был организован администрацией Буша для того, чтобы начать войну на Ближнем Востоке), будут искать и находить маленькие фактики тут и там, которые, как им кажется, указывают на то, что это может быть правдой (Буш сидел в классе и занимался с детьми чтением, как будто знал, что он в безопасности), игнорируя при этом огромный объем доказательств, указывающих на другое, более вероятное объяснение событий (организовали этот теракт Усама бен Ладен и международные террористы). Предвзятость подтверждения также помогает объяснить, каким образом астрологи, гадалки и экстрасенсы настолько успешно «читают» людей. Люди, которых «прочли», вероятнее всего, запомнят несколько попаданий и забудут бесчисленные промахи. Если реально подсчитать все попадания и промахи — как я однажды сделал для специального выпуска о медиумах на телеканале ABC, — то получается, что это не более чем угадывание и теория вероятности в действии.

Что касается снов — «предвестников смерти», то если бы хоть пара человек, которым такое снится, поведали свои «чудесные сказки» на общественном форуме (сидя рядом

с Опррой!*) , паранормальность, наверное, была бы доказана. Но, по сути, это не что иное, как ярко выраженные законы вероятности.

Такой математический процесс размышлений о странных вещах привел меня к другим черновым расчетам относительно чудес. Люди обычно пускают в ход термин *чудо* для описания действительно необычных явлений — событий, шансы на возникновение которых равны «одному на миллион».

Итак, возьмем это утверждение в качестве определения: чудо — это событие, вероятность наступления которого равна одному шансу на миллион. Теперь займемся расчетами. В течение дня на нас обрушивается огромный поток информации. То есть сигналы окружающей среды поступают к нам через органы чувств со скоростью около одного случая в секунду. Если мы бодрствуем и сохраняем бдительность, находясь в этом «мире», скажем, восемь часов в день, то ежедневно пропускаем через себя примерно 30 тысяч битов данных, или один миллион событий в месяц. Конечно, подавляющее большинство этих данных и событий не несут никакого смысла, а наш мозг устроен так, чтобы отфильтровывать большинство из них во избежание перегрузки. Но в пределах одного месяца мы можем ожидать, что событие «один на миллион» наступит хотя бы один раз. Прибавьте к этому предвзятость подтверждения, когда мы будем помнить самые необычные явления и забудем обо всем остальном. И тогда неизбежно кто-то где-то будет сообщать о «чуде» каждый месяц. И таблоиды будут тут как тут, чтобы подхватить эту новость.

* Опра Уинфри — американская актриса и ведущая ток-шоу «Шоу Опры Уинфри». Наиболее влиятельный человек шоу-бизнеса в 2009 году по версии журнала *Forbes*. *Прим. ред.*

Это короткий пример на тему «Как работает наука». В нашем стремлении понять, как устроен мир, мы должны определить, что реально, а что нет; что происходит случайно, а что закономерно. Проблема, с которой мы сталкиваемся, состоит в том, что в процессе эволюции человеческий мозг приспособился обращать внимание на действительно необычные явления и игнорировать огромный объем данных, поступающих параллельно; само по себе мышление в статистических и вероятностных категориях не дано природой. Наука не дана природой. Все это подразумевает некую подготовку и практику.

В добавление ко всему существуют досадные когнитивные (познавательные) искажения, которые я упомянул, например предвзятость подтверждения. Есть и другие. Данные не просто говорят сами за себя. Они фильтруются нашим очень субъективным и предвзятым мозгом. Такое *корыстное смещение* навязывает нам склонность видеть себя в более позитивном свете, нежели нас воспринимают окружающие. Национальные опросы показывают, что большинство деловых людей считают себя более нравственными, чем другие представители бизнес-среды, в то время как психологи, изучающие моральную составляющую психологии, думают, будто они гораздо порядочнее, чем их коллеги. В исследовании College Entrance Examination Board в выборке из 829 тысяч абитуриентов никто не оценил себя ниже среднего в умении ладить с людьми, в то время как 60 процентов по этому критерию поставили себя в топ-10 процентов. И согласно исследованию (1997 года) журнала U.S. News & World Report относительно веры американцев в то, кто, скорее всего, попадет в рай, 52 процента назвали Билла Клинтона; 60 процентов полагают, что принцесса Диана; 65 процентов выбрали Майкла Джордана; 79 процентов

назвали мать Терезу и 87 процентов респондентов указали в качестве такого человека своего интервьюера!

Профессор психологии из Принстонского университета Эмили Пронин и ее коллеги провели эксперимент по изучению предвзятости под названием «слепое пятно», во время которого испытуемые признали существование и влияние на других людей восьми различных когнитивных отклонений, но не смогли разглядеть их в себе. В одном из исследований группу студентов из Стэндфорда попросили сравнить себя со своими сверстниками по таким личным качествам, как дружелюбность и эгоизм. Они предсказуемо оценили себя выше. Даже тогда, когда их предупредили о типе смещения «выше среднего» и попросили пересмотреть свои первоначальные оценки, 63 процента респондентов заявили, что их первоначальные оценки объективны, а 13 процентов даже утверждали, что уже изначально были слишком скромны! Во втором исследовании Пронин наугад приписала респондентам высокие или низкие оценки по результатам теста «Социальный интеллект». Неудивительно, что те, кто получил высокие оценки, назвали тест справедливым и полезным, в отличие от тех, кому поставили низкие оценки. Когда их спросили, есть ли вероятность, что их мнение продиктовано результатами теста, студенты ответили, что это не так. По результатам третьего исследования, в ходе которого Пронин расспрашивала студентов о методах, применяемых ими для оценки своих и чужих предубеждений, она обнаружила, что люди склонны использовать общие поведенческие теории для оценки других, но не применяют их при самооценке. При этом они не верят в так называемую иллюзию самообмана, считая, что другие не могут похвастаться ее отсутствием. Это принцип «что справедливо для меня, то не имеет никакого отношения к тебе».

Психолог Фрэнк Саллоуэй из Калифорнийского университета в Беркли и я сделали похожее открытие в области «предвзятости приписывания»* в ходе исследования на тему «Почему люди говорят, что верят в Бога, и почему, на их взгляд, в него верят другие». В общем случае большинство людей связывают собственную веру в Бога с такими интеллектуальными причинами, как устройство и сложность мира, при этом приписывая другим людям эмоциональные причины (так комфортнее, это придает смысл жизни, их так воспитали).

Политологи сделали аналогичное открытие относительно политических отношений, в которых республиканцы оправдывают свои консервативные взгляды рациональными аргументами, но утверждают, что демократы — это «мягкотелые либералы», в то время как демократы утверждают, что их либеральные настроения наиболее рациональны, но обвиняют республиканцев в «бессердечности».

Как наука справляется с такими предубеждениями? Как узнать, является ли утверждение ложным? Мы хотим быть достаточно открытыми для новых идей, чтобы суметь принять радикальные точки зрения, когда время от времени с ними сталкиваемся. Но мы не хотим быть настолько восприимчивыми, чтобы наш мозг вышел из строя. Эта проблема привела нас в «Сообщество скептиков» для создания пакета образовательных средств под названием «Детектор чепухи». Нас вдохновили рассуждения Карла Сагана из его чудесной книги *The Demon-Haunted World* («Наполненный демонами мир») о том, как обнаружить «чушь» и «чепуху». В комплекте с пакетом «Детектор чепухи» мы предлагаем десять вопросов, которые

* Приписывание (атрибуция) — механизм объяснения причин поведения другого человека. *Прим. пер.*

следует задать себе при столкновении с каким-либо утверждением. Они помогут решить, ведем ли мы себя слишком открыто, принимая все на веру, или слишком закрыто, отвергая что-либо.

1. Насколько надежен источник утверждения?

Как эффективно продемонстрировал Даниэль Кевлес в своей книге 1990 года *The Baltimore Case* («Дело Балтимора»), при расследовании возможного научного мошенничества, если говорить техническим языком, «основная проблема состоит в обнаружении сигнала обмана на фоне шума ошибок и разгильдяйства», которые обычно включены в научный процесс. Исследование научных записей (проведено независимым комитетом, утвержденным Конгрессом для расследований возможных случаев научного мошенничества) в лаборатории лауреата Нобелевской премии Дэвида Балтимора выявило удивительное количество ошибок. Наука пребывает в гораздо большем беспорядке, чем многие себе представляют. Балтимор был оправдан, когда стало ясно, что не было никакой целенаправленной подтасовки данных.

2. Часто ли данный источник делает такие утверждения?

Лжеученые имеют привычку выходить далеко за границы фактов. Поэтому когда люди делают многочисленные экстраординарные заявления, они могут стать чем-то большим, нежели просто возмутителями спокойствия. Это вопрос количественного масштабирования, так как некоторые великие мыслители часто выходят за рамки данных в своих творческих умозрениях. Томас Годл из Корнельского университета хоть и известен своими радикальными идеями, но достаточно часто оказывается прав, так что другие ученые прислушиваются к его мнению. Годл предполагает, например, что нефть —

не ископаемое топливо, а побочный продукт глубокой горячей биосферы. Почти никто из ученых, с которыми я разговаривал, не воспринимает этот тезис всерьез, однако они не считают Голда чудачком. Поэтому мы ищем здесь примеры периферийного (выходящего за общепринятые рамки) мышления, которое последовательно игнорирует или искажает данные.

3. Были ли эти утверждения подтверждены каким-либо другим источником?

Обычно лжеученые делают или никем непроверенные заявления, или проверенные представителями группы людей с такими же убеждениями. Мы должны спросить о том, кто проверяет утверждения, и даже о том, кто проверяет тех, кто проверяет. Самая большая проблема с неудачей холодного ядерного синтеза, например, состоит не в том, что ученые Стэнли Понс и Мартин Флейшман ошиблись, а в том, что они объявили (на пресс-конференции, что удивительно) о своем захватывающем открытии прежде, чем оно было проверено в других лабораториях. И что еще хуже, когда холодный ядерный синтез не был воспроизведен, они продолжали цепляться за свое мнение.

4. Как это утверждение соотносится с тем, что мы уже знаем об окружающем мире?

Необычные утверждения должны быть помещены в более широкий контекст, чтобы посмотреть, вписываются ли они в окружающую действительность. Когда люди утверждают, что пирамиды и Сфинкс построены более десяти тысяч лет назад передовой человеческой расой, они не предоставляют сопутствующего контекста существования этой более ранней цивилизации. Где остальные артефакты тех людей? Где их произведения искусства, оружие, одежда, инструменты, останки? Археология работает совсем не так.

5. Кто-нибудь побеспокоился об опровержении данного утверждения или были найдены только подтверждающие доказательства?

Это предвзятость подтверждения, или склонность искать подтверждающие доказательства и отрицать (или игнорировать) неподтверждающие. Предвзятость подтверждения — мощная и широко распространенная проблема, и ее практически никому невозможно избежать. Именно поэтому важны научные методы, которые придают особое значение проверкам и перепроверкам, верификации и повторяемости опытов и в особенности попыткам доказать ложность утверждения.

6. Более веские доказательства приводят к такому же заключению, что сделал автор утверждения, или другому?

Теория эволюции, например, была подтверждена благодаря совпадению доказательств ряда независимых исследований. Нет ни одного ископаемого, ни единого экземпляра биологического или палеонтологических доказательств с надписью «эволюция» на нем. Вместо этого есть совпадение десятков тысяч битов доказательной информации, которые в сумме дают историю эволюции жизни. Креационисты просто-напросто игнорируют такую сходимость доказательных фактов, сосредотачиваясь вместо этого на тривиальных аномалиях или необъяснимых в настоящее время явлениях из истории жизни на Земле.

7. Придерживается ли автор утверждения общепринятых правил аргументации и инструментов исследования или же от всего этого пришлось отказаться ради других методов, которые способны привести к желаемому выводу?

Уфологи страдают от этого заблуждения в своей постоянной направленности на небольшое количество необъяснимых

атмосферных аномалий и ошибочных зрительных свидетельств очевидцев, в то же время преспокойно игнорируя тот факт, что подавляющее большинство зрительных наблюдений НЛО (от 90 до 95 процентов) можно полностью объяснить, используя тривиальные ответы.

8. Предоставил ли автор утверждения другое объяснение наблюдаемых феноменов или это процесс беспощадного отрицания существующей теории?

Классическая стратегия спорщика — критиковать оппонента и никогда не подтверждать информацию о своих убеждениях, чтобы избежать критики. Но такая уловка неприемлема в науке. Скептики теории большого взрыва, например, игнорируют сходимость доказательств этой космологической модели и сосредотачиваются на нескольких ее недостатках, до сих пор предлагая ей жизнеспособную альтернативу (которая является поставщиком перевешивающих доказательств в пользу существующей модели).

9. В случае если автор утверждения предложил новое объяснение, удовлетворяет ли оно такому же количеству феноменов, как и старое?

Скептики ВИЧ-СПИДа утверждают, что образ жизни, а не ВИЧ, вызывает СПИД. Тем не менее, чтобы сделать такое заявление, они должны проигнорировать множество доказательств в поддержку ВИЧ как причины переноса инфекции СПИДа и одновременно проигнорировать такое очевидное свидетельство, как доказанная зависимость между ростом распространения СПИДа среди больных гемофилией вскоре после того, как ВИЧ по недосмотру был внесен в кровеносную систему. Вдобавок к этому их альтернативная теория совсем не объясняет такого количества фактов, как это делает теория ВИЧ.

10. Личные убеждения и предвзятости движут автором утверждения или нет?

Все ученые придерживаются социальных, политических и идеологических убеждений, которые потенциально могут стать причиной перекоса при интерпретации данных. Но как эти предрассудки и убеждения влияют на само исследование? В какой-то момент, как правило, в период рецензирования научной статьи, такие предубеждения и верования «удаляют с корнем», иначе статья или книга не будет разрешена к публикации. Вот почему не следует работать в интеллектуальном вакууме. Если вы не заметите предубеждения в своем исследовании, его увидит кто-нибудь другой.

Не существует строгого набора критериев, применимых для определения степени открытости, которой нам следует придерживаться во время первого знакомства с новыми утверждениями и идеями. Но благодаря математическим расчетам вероятности наступления странных событий и с помощью анализа ответов на вопросы, которые необходимо задать себе, мы сделаем первый шаг навстречу нашему странному и чудному миру.

Ответы

Глава 1. Небольшой обмен любезностями

СЛОЖЕНИЕ ДВУЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

1. $23 + 16 = 23 + 10 + 6 = 33 + 6 = 39$
2. $64 + 43 = 64 + 40 + 3 = 104 + 3 = 107$
3. $95 + 32 = 95 + 30 + 2 = 125 + 2 = 127$
4. $34 + 26 = 34 + 20 + 6 = 54 + 6 = 60$
5. $89 + 78 = 89 + 70 + 8 = 159 + 8 = 167$
6. $73 + 58 = 73 + 50 + 8 = 123 + 8 = 131$
7. $47 + 36 = 47 + 30 + 6 = 77 + 6 = 83$
8. $19 + 17 = 19 + 10 + 7 = 29 + 7 = 36$
9. $55 + 49 = 55 + 40 + 9 = 95 + 9 = 104$
10. $39 + 38 = 39 + 30 + 8 = 69 + 8 = 77$

СЛОЖЕНИЕ ТРЕХЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

1. $242 + 137 = 242 + 100 + 30 + 7 = 342 + 30 + 7 = 372 + 7 = 379$
2. $312 + 256 = 312 + 200 + 50 + 6 = 512 + 50 + 6 = 562 + 6 = 568$
3. $635 + 814 = 635 + 800 + 10 + 4 = 1435 + 10 + 4 = 1445 + 4 = 1449$
4. $457 + 241 = 457 + 200 + 40 + 1 = 657 + 40 + 1 = 697 + 1 = 698$
5. $912 + 475 = 912 + 400 + 70 + 5 = 1312 + 70 + 5 = 1382 + 5 = 1387$

6. $852 + 378 = 852 + 300 + 70 + 8 = 1152 + 70 + 8 = 1222 + 8 = 1230$
7. $457 + 269 = 457 + 200 + 60 + 9 = 657 + 60 + 9 = 717 + 9 = 726$
8. $878 + 797 = 878 + 700 + 90 + 7 = 1578 + 90 + 7 = 1668 + 7 = 1675$ или $878 + 797 = 878 + 800 - 3 = 1678 - 3 = 1675$
9. $276 + 689 = 276 + 600 + 80 + 9 = 876 + 80 + 9 = 956 + 9 = 965$
10. $877 + 539 = 877 + 500 + 30 + 9 = 1377 + 30 + 9 = 1407 + 9 = 1416$
11. $5400 + 252 = 5400 + 200 + 52 = 5600 + 52 = 5652$
12. $1800 + 855 = 1800 + 800 + 55 = 2600 + 55 = 2655$
13. $6120 + 136 = 6120 + 100 + 30 + 6 = 6220 + 30 + 6 = 6250 + 6 = 6256$
14. $7830 + 348 = 7830 + 300 + 40 + 8 = 8130 + 40 + 8 = 8170 + 8 = 8178$
15. $4240 + 371 = 4240 + 300 + 70 + 1 = 4540 + 70 + 1 = 4610 + 1 = 4611$

ВЫЧИТАНИЕ ДВУЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

1. $38 - 23 = 38 - 20 - 3 = 18 - 3 = 15$
2. $84 - 59 = 84 - 60 + 1 = 24 + 1 = 25$
3. $92 - 34 = 92 - 40 + 6 = 52 + 6 = 58$
4. $67 - 48 = 67 - 50 + 2 = 17 + 2 = 19$
5. $79 - 29 = 79 - 20 - 9 = 59 - 9 = 50$ или $79 - 29 = 79 - 30 + 1 = 49 + 1 = 50$
6. $63 - 46 = 63 - 50 + 4 = 13 + 4 = 17$
7. $51 - 27 = 51 - 30 + 3 = 21 + 3 = 24$
8. $89 - 48 = 89 - 40 - 8 = 49 - 8 = 41$
9. $125 - 79 = 125 - 80 + 1 = 45 + 1 = 46$
10. $148 - 86 = 148 - 90 + 4 = 58 + 4 = 62$

ВЫЧИТАНИЕ ТРЕХЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

1. $583 - 271 = 583 - 200 - 70 - 1 = 383 - 70 - 1 = 313 - 1 = 312$
2. $936 - 725 = 936 - 700 - 20 - 5 = 236 - 20 - 5 = 216 - 5 = 211$
3. $587 - 298 = 587 - 300 + 2 = 287 + 2 = 289$
4. $763 - 486 = 763 - 500 + 14 = 263 + 14 = 277$
5. $204 - 185 = 204 - 200 + 15 = 04 + 15 = 19$
6. $793 - 402 = 793 - 400 - 2 = 393 - 2 = 391$
7. $219 - 176 = 219 - 200 + 24 = 19 + 24 = 43$
8. $978 - 784 = 978 - 800 + 16 = 178 + 16 = 194$
9. $455 - 319 = 455 - 400 + 81 = 55 + 81 = 136$
10. $772 - 596 = 772 - 600 + 4 = 172 + 4 = 176$
11. $873 - 357 = 873 - 400 + 43 = 473 + 43 = 516$
12. $564 - 228 = 564 - 300 + 72 = 264 + 72 = 336$
13. $1428 - 571 = 1428 - 600 + 29 = 828 + 29 = 857$
14. $2345 - 678 = 2345 - 700 + 22 = 1645 + 22 = 1667$
15. $1776 - 987 = 1776 - 1000 + 13 = 776 + 13 = 789$

Глава 2. Произведения растраченной юности

УМНОЖЕНИЯ ТИПА «2 НА 1»

- | | | | | | | | | | |
|----|------------|----|------------|----|------------|----|------------|-----|------------|
| 1. | 82 | 2. | 43 | 3. | 67 | 4. | 71 | 5. | 93 |
| | $\times 9$ | | $\times 7$ | | $\times 5$ | | $\times 3$ | | $\times 8$ |
| | 720 | | 280 | | 300 | | 210 | | 720 |
| | $+ 18$ | | $+ 21$ | | $+ 35$ | | $+ 3$ | | $+ 24$ |
| | 738 | | 301 | | 335 | | 213 | | 744 |
| | | | | | | | | | |
| 6. | 49 или 49 | 7. | 28 | 8. | 53 | 9. | 84 | 10. | 58 |
| | $\times 9$ | | $\times 9$ | | $\times 4$ | | $\times 5$ | | $\times 6$ |
| | 360 | | 450 | | 80 | | 250 | | 400 |
| | $+ 81$ | | $- 9$ | | $+ 32$ | | $+ 15$ | | $+ 20$ |
| | 441 | | 441 | | 112 | | 265 | | 420 |
| | | | | | | | | | 348 |

Магия чисел

11.	$\begin{array}{r} 97 \\ \times 4 \\ \hline 360 \\ + 28 \\ \hline 388 \end{array}$	12.	$\begin{array}{r} 78 \\ \times 2 \\ \hline 140 \\ + 6 \\ \hline 156 \end{array}$	13.	$\begin{array}{r} 96 \\ \times 9 \\ \hline 810 \\ + 54 \\ \hline 864 \end{array}$	14.	$\begin{array}{r} 75 \\ \times 4 \\ \hline 280 \\ + 20 \\ \hline 300 \end{array}$	15.	$\begin{array}{r} 57 \\ \times 7 \\ \hline 350 \\ + 49 \\ \hline 399 \end{array}$
16.	$\begin{array}{r} 37 \\ \times 6 \\ \hline 180 \\ + 42 \\ \hline 222 \end{array}$	17.	$\begin{array}{r} 46 \\ \times 2 \\ \hline 80 \\ + 12 \\ \hline 92 \end{array}$	18.	$\begin{array}{r} 76 \\ \times 8 \\ \hline 560 \\ + 48 \\ \hline 608 \end{array}$	19.	$\begin{array}{r} 29 \\ \times 3 \\ \hline 60 \\ + 27 \\ \hline 87 \end{array}$	20.	$\begin{array}{r} 64 \\ \times 8 \\ \hline 480 \\ + 32 \\ \hline 512 \end{array}$

УМНОЖЕНИЯ ТИПА «3 НА 1»

1.	$\begin{array}{r} 431 \\ \times 6 \\ \hline 2400 \\ + 180 \\ \hline 2580 \\ + 6 \\ \hline 2586 \end{array}$	2.	$\begin{array}{r} 637 \\ \times 5 \\ \hline 3000 \\ + 150 \\ \hline 3150 \\ + 35 \\ \hline 3185^* \end{array}$	3.	$\begin{array}{r} 862 \\ \times 4 \\ \hline 3200 \\ + 240 \\ \hline 3440 \\ + 8 \\ \hline 3448 \end{array}$	4.	$\begin{array}{r} 957 \\ \times 6 \\ \hline 5400 \\ + 300 \\ \hline 5700 \\ + 42 \\ \hline 5742 \end{array}$
5.	$\begin{array}{r} 927 \\ \times 7 \\ \hline 6300 \\ + 140 \\ \hline 6440 \\ + 49 \\ \hline 6489 \end{array}$	6.	$\begin{array}{r} 728 \\ \times 2 \\ \hline 1400 \\ + 40 \\ \hline 1440 \\ + 16 \\ \hline 1456 \end{array}$	7.	$\begin{array}{r} 328 \\ \times 6 \\ \hline 1800 \\ + 120 \\ \hline 1920 \\ + 48 \\ \hline 1968 \end{array}$	8.	$\begin{array}{r} 529 \\ \times 9 \\ \hline 4500 \\ + 180 \\ \hline 4680 \\ + 81 \\ \hline 4761 \end{array}$

* В таких задачах можно проговаривать ответ вслух в процессе их решения.

ОТВЕТЫ

- | | | | | |
|--|--|--|--|---|
| <p>9. $\begin{array}{r} 807 \\ \times 9 \\ \hline 7200 \\ + 63 \\ \hline 7263 \end{array}$</p> | <p>10. $\begin{array}{r} 587 \\ \times 4 \\ \hline 2000 \\ + 320 \\ \hline 2320 \\ + 28 \\ \hline 2348^* \end{array}$</p> | <p>11. $\begin{array}{r} 184 \\ \times 7 \\ \hline 700 \\ + 560 \\ \hline 1260 \\ + 28 \\ \hline 1288 \end{array}$</p> | <p>12. $\begin{array}{r} 214 \\ \times 8 \\ \hline 1600 \\ + 80 \\ \hline 1680 \\ + 32 \\ \hline 1712 \end{array}$</p> | |
| <p>13. $\begin{array}{r} 757 \\ \times 8 \\ \hline 5600 \\ + 400 \\ \hline 6000 \\ + 56 \\ \hline 6056 \end{array}$</p> | <p>14. $\begin{array}{r} 259 \\ \times 7 \\ \hline 1400 \\ + 350 \\ \hline 1750 \\ + 63 \\ \hline 1813 \end{array}$</p> | <p>15. $\begin{array}{r} 297 \\ \times 8 \\ \hline 1600 \\ + 720 \\ \hline 2320 \\ + 56 \\ \hline 2376 \end{array}$</p> | <p>ИЛИ $\begin{array}{r} 297 \\ \times 8 \\ \hline 2400 \\ - 24 \\ \hline 2376 \end{array}$</p> | <p>16. $\begin{array}{r} 751 \\ \times 9 \\ \hline 6300 \\ + 450 \\ \hline 6750 \\ + 9 \\ \hline 6759 \end{array}$</p> |
| <p>17. $\begin{array}{r} 457 \\ \times 7 \\ \hline 2800 \\ + 350 \\ \hline 3150 \\ + 49 \\ \hline 3199 \end{array}$</p> | <p>18. $\begin{array}{r} 339 \\ \times 8 \\ \hline 2400 \\ + 240 \\ \hline 2640 \\ + 72 \\ \hline 2712 \end{array}$</p> | <p>19. $\begin{array}{r} 134 \\ \times 8 \\ \hline 800 \\ + 240 \\ \hline 1040 \\ + 32 \\ \hline 1072 \end{array}$</p> | <p>20. $\begin{array}{r} 611 \\ \times 3 \\ \hline 1800 \\ + 33 \\ \hline 1833 \end{array}$</p> | |
| <p>21. $\begin{array}{r} 578 \\ \times 9 \\ \hline 4500 \\ + 630 \\ \hline 5130 \\ + 72 \\ \hline 5202 \end{array}$</p> | <p>22. $\begin{array}{r} 247 \\ \times 5 \\ \hline 1000 \\ + 200 \\ \hline 1200 \\ + 35 \\ \hline 1235^* \end{array}$</p> | <p>23. $\begin{array}{r} 188 \\ \times 6 \\ \hline 600 \\ + 480 \\ \hline 1080 \\ + 48 \\ \hline 1128 \end{array}$</p> | <p>24. $\begin{array}{r} 968 \\ \times 6 \\ \hline 5400 \\ + 360 \\ \hline 5760 \\ + 48 \\ \hline 5808 \end{array}$</p> | |

Магия чисел

25.	499		499	26.	670	27.	429	28.	862
	$\times 9$	или	$\times 9$		$\times 4$		$\times 3$		$\times 5$
	3600	$500 \times 9 =$	4500		2400		1200		4000
	+ 810	$-1 \times 9 =$	- 9		+ 280		+ 60		+ 300
	4410		4491		2680		1260		4300
	+ 81						+ 27		+ 10
	4491						1287		4310*
29.	285	30.	488	31.	693	32.	722		
	$\times 6$		$\times 9$		$\times 6$		$\times 9$		
	1200		3600		3600		6300		
	+ 480		+ 720		+ 540		+ 180		
	1680		4320		4140		6480		
	+ 30		+ 72		+ 18		+ 18		
	1710		4392		4158		6498		
33.	457	34.	767	35.	312	36.	691		
	$\times 9$		$\times 3$		$\times 9$		$\times 3$		
	3600		2100		2700		1800		
	+ 450		+ 180		+ 90		+ 270		
	4050		2280		2790		2070		
	+ 63		+ 21		+ 18		+ 3		
	4113		2301		2808		2073		

ВОЗВЕДЕНИЕ ДВУЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ В КВАДРАТ

$$1. 14^2 \begin{array}{l} \xrightarrow{+4} 18 \\ \xrightarrow{-4} 10 \end{array} \rightarrow 180 + 4^2 = 196$$

$$2. 27^2 \begin{array}{l} \xrightarrow{+3} 30 \\ \xrightarrow{-3} 24 \end{array} \rightarrow 720 + 3^2 = 729$$

$$3. 65^2 \begin{array}{l} \xrightarrow{+5} 70 \\ \xrightarrow{-5} 60 \end{array} \rightarrow 4200 + 5^2 = 4225$$

$$4. 89^2 \begin{array}{l} \xrightarrow{+1} 90 \\ \xrightarrow{-1} 88 \end{array} \rightarrow 7920 + 1^2 = 7921$$

$$5. 98^2 \begin{array}{l} \xrightarrow{+2} 100 \\ \xrightarrow{-2} 96 \end{array} \rightarrow 9600 + 2^2 = 9604$$

$$6. 31^2 \begin{array}{l} \xrightarrow{+1} 32 \\ \xrightarrow{-1} 30 \end{array} \rightarrow 960 + 1^2 = 961$$

$$7. 41^2 \begin{array}{l} \xrightarrow{+1} 42 \\ \xrightarrow{-1} 40 \end{array} \rightarrow 1680 + 1^2 = 1681$$

$$8. 59^2 \begin{array}{l} \xrightarrow{+1} 60 \\ \xrightarrow{-1} 58 \end{array} \rightarrow 3480 + 1^2 = 3481$$

$$9. \quad 26^2 \begin{cases} +4 \rightarrow 30 \\ -4 \rightarrow 22 \end{cases} \rightarrow 660 + 4^2 = 676$$

$$10. \quad 53^2 \begin{cases} +3 \rightarrow 56 \\ -3 \rightarrow 50 \end{cases} \rightarrow 2800 + 3^2 = 2809$$

$$11. \quad 21^2 \begin{cases} +1 \rightarrow 22 \\ -1 \rightarrow 20 \end{cases} \rightarrow 440 + 1^2 = 441$$

$$12. \quad 64^2 \begin{cases} +4 \rightarrow 68 \\ -4 \rightarrow 60 \end{cases} \rightarrow 4080 + 4^2 = 4096$$

$$13. \quad 42^2 \begin{cases} +2 \rightarrow 44 \\ -2 \rightarrow 40 \end{cases} \rightarrow 1760 + 2^2 = 1764$$

$$14. \quad 55^2 \begin{cases} +5 \rightarrow 60 \\ -5 \rightarrow 50 \end{cases} \rightarrow 3000 + 5^2 = 3025$$

$$15. \quad 75^2 \begin{cases} +5 \rightarrow 80 \\ -5 \rightarrow 70 \end{cases} \rightarrow 5600 + 5^2 = 5625$$

$$16. \quad 45^2 \begin{cases} +5 \rightarrow 50 \\ -5 \rightarrow 40 \end{cases} \rightarrow 2000 + 5^2 = 2025$$

$$17. \quad 84^2 \begin{cases} +4 \rightarrow 88 \\ -4 \rightarrow 80 \end{cases} \rightarrow 7040 + 4^2 = 7056$$

$$18. \quad 67^2 \begin{cases} +3 \rightarrow 70 \\ -3 \rightarrow 64 \end{cases} \rightarrow 4480 + 3^2 = 4489$$

$$19. \quad 103^2 \begin{cases} +3 \rightarrow 106 \\ -3 \rightarrow 100 \end{cases} \rightarrow 10\,600 + 3^2 = 10\,609$$

$$20. \quad 208^2 \begin{cases} +8 \rightarrow 216 \\ -8 \rightarrow 200 \end{cases} \rightarrow 43\,200 + 8^2 = 43\,264$$

Глава 3. Усовершенствованные произведения

УМНОЖЕНИЕ НА 11

$$1. \quad \begin{array}{r} 35 \\ \times 11 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 _ 5 \\ 8 \end{array} = 385$$

$$2. \quad \begin{array}{r} 48 \\ \times 11 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 _ 8 \\ 12 \end{array} = 528$$

$$3. \quad \begin{array}{r} 94 \\ \times 11 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 9 _ 4 \\ 13 \end{array} = 1034$$

МЕТОД СЛОЖЕНИЯ ДЛЯ УМНОЖЕНИЯ ТИПА «2 НА 2»

$$1. \quad \begin{array}{r} 31 (30+1) \\ 30 \times 41 = \begin{array}{r} \times 41 \\ 1230 \\ \hline \end{array} \\ 1 \times 41 = + \begin{array}{r} 41 \\ \hline \end{array} \\ \hline 1271 \end{array}$$

$$\text{или} \quad \begin{array}{r} 31 \\ 40 \times 31 = \begin{array}{r} \times 41 (40+1) \\ 1240 \\ \hline \end{array} \\ 1 \times 31 = + \begin{array}{r} 31 \\ \hline \end{array} \\ \hline 1271 \end{array}$$

$$2. \quad \begin{array}{r} 27 (20+7) \\ 20 \times 18 = \begin{array}{r} \times 18 \\ 360 \\ \hline \end{array} \\ 7 \times 18 = + \begin{array}{r} 126 \\ \hline \end{array} \\ \hline 486 \end{array}$$

$$3. \quad \begin{array}{r} 59 (50+9) \\ 50 \times 26 = \begin{array}{r} \times 26 \\ 1300 \\ \hline \end{array} \\ 9 \times 26 = + \begin{array}{r} 234 \\ \hline \end{array} \\ \hline 1534 \end{array}$$

Магия чисел

$$\begin{array}{r}
 4. \quad \quad \quad 53 (50+3) \\
 \quad \quad \quad \times 58 \\
 50 \times 58 = \underline{2900} \\
 3 \times 58 = \underline{+ 174} \\
 \quad \quad \quad 3074
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5. \quad \quad \quad 77 \\
 \quad \quad \quad \times 43 (40+3) \\
 40 \times 77 = \underline{3080} \\
 3 \times 77 = \underline{+ 231} \\
 \quad \quad \quad 3311
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6. \quad \quad \quad 23 (20+3) \\
 \quad \quad \quad \times 84 \\
 20 \times 84 = \underline{1680} \\
 3 \times 84 = \underline{+ 252} \\
 \quad \quad \quad 1932
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{или} \quad \quad \quad 23 \\
 \quad \quad \quad \times 84 (80+4) \\
 80 \times 23 = \underline{1840} \\
 4 \times 23 = \underline{+ 92} \\
 \quad \quad \quad 1932
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 7. \quad \quad \quad 62 (60+2) \\
 \quad \quad \quad \times 94 \\
 60 \times 94 = \underline{5640} \\
 2 \times 94 = \underline{+ 188} \\
 \quad \quad \quad 5828
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 8. \quad \quad \quad 88 (80+8) \\
 \quad \quad \quad \times 76 \\
 80 \times 76 = \underline{6080} \\
 8 \times 76 = \underline{+ 608} \\
 \quad \quad \quad 6688
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 9. \quad \quad \quad 92 (90+2) \\
 \quad \quad \quad \times 35 \\
 90 \times 35 = \underline{1230} \\
 2 \times 35 = \underline{+ 70} \\
 \quad \quad \quad 3220
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 10. \quad 34 \quad 3 \quad \underline{\quad} \quad 4 = 374 \text{ или } 340 \\
 \times 11 \quad \quad 7 \quad \quad \quad \underline{+ 34} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 374
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 11. \quad 85 \quad 8 \quad \underline{\quad} \quad 5 = 935 \text{ или } 850 \\
 \times 11 \quad \quad 13 \quad \quad \quad \underline{+ 85} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 935
 \end{array}$$

МЕТОД ВЫЧИТАНИЯ ДЛЯ УМНОЖЕНИЯ ТИПА «2 НА 2»

1. $29(30-1)$
- $$\begin{array}{r} \times 45 \\ 30 \times 45 = 1350 \\ -1 \times 45 = -45 \\ \hline 1305 \end{array}$$
2. $98(100-2)$
- $$\begin{array}{r} \times 43 \\ 100 \times 43 = 4300 \\ -2 \times 43 = -86 \\ \hline 4214 \end{array}$$
3. 47
- $$\begin{array}{r} \times 59(60-1) \\ 60 \times 47 = 2820 \\ -1 \times 47 = -47 \\ \hline 2773 \end{array}$$
4. $68(70-2)$
- $$\begin{array}{r} \times 43 \\ 70 \times 38 = 2660 \\ -2 \times 38 = -76 \\ \hline 2584 \end{array}$$
5. $96(100-4)$
- $$\begin{array}{r} \times 29 \\ 100 \times 29 = 2900 \\ -4 \times 29 = -116 \\ \hline 2784 \end{array}$$
- или
- $$\begin{array}{r} 96 \\ \times 29(30-1) \\ 30 \times 96 = 2880 \\ -1 \times 96 = -96 \\ \hline 2784 \end{array}$$
6. $79(80-1)$
- $$\begin{array}{r} \times 54 \\ 80 \times 54 = 4320 \\ -1 \times 54 = -54 \\ \hline 4266 \end{array}$$
7. 37
- $$\begin{array}{r} \times 19(20-1) \\ 20 \times 37 = 740 \\ -1 \times 37 = -37 \\ \hline 703 \end{array}$$
8. $87(90-3)$
- $$\begin{array}{r} \times 22 \\ 90 \times 22 = 1980 \\ -3 \times 22 = -66 \\ \hline 1914 \end{array}$$
9. 85
- $$\begin{array}{r} \times 38(40-2) \\ 40 \times 85 = 3400 \\ -2 \times 85 = -170 \\ \hline 3230 \end{array}$$
10. 57
- $$\begin{array}{r} \times 39(40-1) \\ 40 \times 57 = 2280 \\ -1 \times 57 = -57 \\ \hline 2223 \end{array}$$
11. 88
- $$\begin{array}{r} \times 49(50-1) \\ 50 \times 88 = 4400 \\ -1 \times 88 = -88 \\ \hline 4312 \end{array}$$

МЕТОД РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ УМНОЖЕНИЯ ТИПА «2 НА 2»

1. $27 \times 14 = 27 \times 7 \times 2 = 189 \times 2 = 378$ *или*
 $14 \times 27 = 14 \times 9 \times 3 = 126 \times 3 = 378$
2. $86 \times 28 = 86 \times 7 \times 4 = 602 \times 4 = 2408$
3. $57 \times 14 = 57 \times 7 \times 2 = 399 \times 2 = 798$
4. $81 \times 48 = 81 \times 8 \times 6 = 648 \times 6 = 3888$ *или*
 $48 \times 81 = 48 \times 9 \times 9 = 432 \times 9 = 3888$
5. $56 \times 29 = 29 \times 7 \times 8 = 203 \times 8 = 1624$
6. $83 \times 18 = 83 \times 6 \times 3 = 498 \times 3 = 1494$
7. $72 \times 17 = 17 \times 9 \times 8 = 153 \times 8 = 1224$
8. $85 \times 42 = 85 \times 6 \times 7 = 510 \times 7 = 3570$
9. $33 \times 16 = 33 \times 8 \times 2 = 264 \times 2 = 528$ *или*
 $16 \times 33 = 16 \times 11 \times 3 = 176 \times 3 = 528$
10. $62 \times 77 = 62 \times 11 \times 7 = 682 \times 7 = 4774$
11. $45 \times 36 = 45 \times 6 \times 6 = 270 \times 6 = 1620$ *или*
 $45 \times 36 = 45 \times 9 \times 4 = 405 \times 4 = 1620$ *или*
 $36 \times 45 = 36 \times 9 \times 5 = 324 \times 5 = 1620$ *или*
 $36 \times 45 = 36 \times 5 \times 9 = 180 \times 9 = 1620$
12. $37 \times 48 = 37 \times 8 \times 6 = 296 \times 6 = 1776$

УМНОЖЕНИЕ ТИПА «2 НА 2» ЛЮБЫМ СПОСОБОМ!

1.

53
$\times 39(40-1)$
$40 \times 53 = 2120$
$-1 \times 53 = -53$
<hr style="width: 50px; margin-left: 0;"/>
2067

или

53 (50+3)
$\times 39$
$50 \times 39 = 1950$
$3 \times 39 = +117$
<hr style="width: 50px; margin-left: 0;"/>
2067
2.

81 (80+1)
$\times 57$
$80 \times 57 = 4560$
$1 \times 57 = +57$
<hr style="width: 50px; margin-left: 0;"/>
4617

или

$57 \times 81 = 57 \times 9 \times 9 =$
$513 \times 9 = 4617$

ОТВЕТЫ

3. 73 $73 \times 18 = 73 \times 9 \times 2 = 657 \times 2 = 1314$ *или*
 $\times 18 (9 \times 2)$ $73 \times 18 = 73 \times 6 \times 3 = 438 \times 3 = 1314$

4. $89 (90 - 1)$ *или* $89 \times 55 = 89 \times 11 \times 5 =$
 $\times 55$ $979 \times 5 = 4895$
 $90 \times 55 = 4950$
 $1 \times 55 = - 55$
4895

5. 77 $77 \times 36 = 77 \times 4 \times 9 = 308 \times 9 = 2772$ *или*
 $\times 36 (4 \times 9)$ $77 \times 36 = 77 \times 9 \times 4 = 693 \times 4 = 2772$

6. 92
 $\times 53 (50 + 3)$
 $50 \times 92 = 4600$
 $3 \times 92 = + 276$
4876

7. 87^2 $\xrightarrow{+3} 90$ $\rightarrow 7560 + 3^2 = 7569$
 $\xrightarrow{-3} 84$

8. 67
 $\times 58 (60 - 2)$
 $60 \times 67 = 4020$
 $-2 \times 67 = -154$
3886

9. $56 (8 \times 7)$ $37 \times 56 = 37 \times 8 \times 7 = 296 \times 7 = 2072$ *или*
 $\times 37$ $37 \times 56 = 37 \times 7 \times 8 = 259 \times 8 = 2072$

10. 59 *или* $59 (60 - 1)$
 $\times 21 (20 + 1)$ $\times 21$
 $20 \times 59 = 1180$ $60 \times 21 = 1260$
 $1 \times 59 = + 59$ $-1 \times 21 = - 21$
1239 **1239**

или $59 \times 21 = 59 \times 7 \times 3 = 413 \times 3 = 1239$

11. 37
 $\times 72 (9 \times 8)$

$37 \times 9 \times 8 = 333 \times 8 = 2664$

13. 38
 $\times 63 (9 \times 7)$

$38 \times 63 = 38 \times 9 \times 7 =$
 $342 \times 7 = 2394$

15. 43
 $\times 75 (5 \times 5 \times 3)$

$43 \times 75 = 43 \times 5 \times 5 \times 3 =$
 $215 \times 5 \times 3 = 1075 \times 3 = 3225$

17. $61 (60 + 1)$
 $\times 37$
 $60 \times 37 = 2220$
 $1 \times 37 = + 37$
 2257

19. $54 (9 \times 6)$
 $\times 53$

$54 \times 53 = 53 \times 9 \times 6 =$
 $477 \times 6 = 2862$

21. $83 (80 + 3)$
 $\times 58$
 $80 \times 58 = 4640$
 $3 \times 58 = + 174$
 4814

12. 57
 $\times 73 (70 + 3)$
 $70 \times 57 = 3990$
 $3 \times 57 = + 171$
 4161

14. $43 (40 + 3)$
 $\times 76$
 $40 \times 76 = 3040$
 $3 \times 76 = + 228$
 3268

16. 74
 $\times 62 (60 + 2)$
 $60 \times 74 = 4440$
 $2 \times 74 = + 148$
 4588

18. $36 (6 \times 6)$
 $\times 41$
 $41 \times 36 = 41 \times 6 \times 6 =$
 $246 \times 6 = 1476$

20. 53^2 $\begin{matrix} \nearrow +3 \\ \searrow -3 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 56 \\ 50 \end{matrix}$ $\rightarrow 2800 + 3^2 = 2809$

22. $91 (90 + 1)$
 $\times 46$
 $90 \times 46 = 4140$
 $1 \times 46 = + 46$
 4186

ОТВЕТЫ

$$\begin{array}{r}
 23. \quad \quad \quad 52 (50 + 2) \\
 \quad \quad \quad \times 47 \\
 50 \times 47 = 2350 \\
 2 \times 47 = + 94 \\
 \hline
 2444
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 24. \quad \quad \quad 29 (30 - 1) \\
 \quad \quad \quad \times 26 \\
 30 \times 26 = 780 \\
 -1 \times 26 = - 26 \\
 \hline
 754
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 25. \quad 41 \\
 \times 15 (5 \times 3) \\
 \\
 41 \times 15 = 41 \times 5 \times 3 = \\
 205 \times 3 = 615
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 26. \quad \quad \quad 65 \\
 \quad \quad \quad \times 19 (20 - 1) \\
 20 \times 65 = 1300 \\
 -1 \times 65 = - 65 \\
 \hline
 1235
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 27. \quad 34 \\
 \times 27 (9 \times 3) \\
 \\
 34 \times 27 = 34 \times 9 \times 3 = \\
 306 \times 3 = 918
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 28. \quad \quad \quad 69 (70 - 1) \\
 \quad \quad \quad \times 78 \\
 70 \times 78 = 5460 \\
 -1 \times 78 = - 78 \\
 \hline
 5382
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 29. \quad 95 \\
 \times 81 (9 \times 9) \\
 \\
 95 \times 81 = 95 \times 9 \times 9 = \\
 855 \times 9 = 7695
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 30. \quad \quad \quad 65 (60 + 5) \\
 \quad \quad \quad \times 47 \\
 60 \times 47 = 2820 \\
 5 \times 47 = + 235 \\
 \hline
 3055
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 31. \quad \quad \quad 65 \\
 \quad \quad \quad \times 69 (70 - 1) \\
 70 \times 65 = 4550 \\
 -1 \times 65 = - 65 \\
 \hline
 4485
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 32. \quad \quad \quad 95 \\
 \quad \quad \quad \times 26 (20 + 6) \\
 20 \times 95 = 1900 \\
 6 \times 95 = + 570 \\
 \hline
 2470
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 33. \quad \quad \quad 41 (40 + 1) \\
 \quad \quad \quad \times 93 \\
 40 \times 93 = 3720 \\
 1 \times 93 = + 93 \\
 \hline
 3813
 \end{array}$$

ВОЗВЕДЕНИЕ В КВАДРАТ ТРЕХЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

$$1. 409^2 \begin{array}{l} +9 \rightarrow 418 \\ -9 \rightarrow 400 \end{array} \rightarrow 167\,200 + 9^2 = 167\,281$$

$$2. 805^2 \begin{array}{l} +5 \rightarrow 810 \\ -5 \rightarrow 800 \end{array} \rightarrow 648\,000 + 5^2 = 648\,025$$

$$3. 217^2 \begin{array}{l} +17 \rightarrow 234 \\ -17 \rightarrow 200 \end{array} \rightarrow 46\,800 + 17^2 = 47\,089$$

$$\begin{array}{l} 17^2 \begin{array}{l} +3 \rightarrow 20 \\ -3 \rightarrow 14 \end{array} \rightarrow 280 + 3^2 = 289 \end{array}$$

$$4. 896^2 \begin{array}{l} +4 \rightarrow 900 \\ -4 \rightarrow 892 \end{array} \rightarrow 802\,800 + 4^2 = 802\,816$$

$$5. 345^2 \begin{array}{l} +45 \rightarrow 390 \\ -45 \rightarrow 300 \end{array} \rightarrow 117\,000 + 45^2 = 119\,025$$

$$\begin{array}{l} 45^2 \begin{array}{l} +5 \rightarrow 50 \\ -5 \rightarrow 40 \end{array} \rightarrow 2\,000 + 5^2 = 2025 \end{array}$$

$$6. 346^2 \begin{array}{l} +46 \rightarrow 392 \\ -46 \rightarrow 300 \end{array} \rightarrow 117\,600 + 46^2 = 119\,716$$

$$\begin{array}{l} 46^2 \begin{array}{l} +4 \rightarrow 50 \\ -4 \rightarrow 42 \end{array} \rightarrow 2\,100 + 4^2 = 2116 \end{array}$$

ОТВЕТЫ

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{l}
 +24 \rightarrow 300 \\
 -24 \rightarrow 252
 \end{array} \\
 7. \ 276^2 \rightarrow 75\ 600 + 24^2 = 76\ 176 \\
 \begin{array}{l}
 +4 \rightarrow 28 \\
 -4 \rightarrow 20
 \end{array} \\
 24^2 \rightarrow 560 + 4^2 = 576
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{l}
 +18 \rightarrow 700 \\
 -18 \rightarrow 664
 \end{array} \\
 8. \ 682^2 \rightarrow 464\ 800 + 18^2 = 465\,124 \\
 \begin{array}{l}
 +2 \rightarrow 20 \\
 -2 \rightarrow 16
 \end{array} \\
 18^2 \rightarrow 320 + 2^2 = 324
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{l}
 +31 \rightarrow 462 \\
 -31 \rightarrow 400
 \end{array} \\
 9. \ 431^2 \rightarrow 184\ 800 + 31^2 = 185\ 761 \\
 \begin{array}{l}
 +1 \rightarrow 32 \\
 -1 \rightarrow 30
 \end{array} \\
 31^2 \rightarrow 960 + 1^2 = 961
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{l}
 +19 \rightarrow 800 \\
 -19 \rightarrow 762
 \end{array} \\
 10. \ 781^2 \rightarrow 609\ 600 + 19^2 = 609\ 961 \\
 \begin{array}{l}
 +1 \rightarrow 20 \\
 -1 \rightarrow 18
 \end{array} \\
 19^2 \rightarrow 360 + 1^2 = 361
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{l}
 +25 \rightarrow 1\ 000 \\
 -25 \rightarrow 950
 \end{array} \\
 11. \ 975^2 \rightarrow 950\ 000 + 25^2 = 950\ 625 \\
 \begin{array}{l}
 +5 \rightarrow 30 \\
 -5 \rightarrow 20
 \end{array} \\
 25^2 \rightarrow 600 + 5^2 = 625
 \end{array}$$

КУБЫ ДВУЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

1. $12^3 = (10 \times 12 \times 14) + (2^2 \times 12) = 1680 + 48 = 1728$
2. $17^3 = (14 \times 17 \times 20) + (3^2 \times 17) = 4760 + 153 = 4913$
3. $21^3 = (20 \times 21 \times 22) + (1^2 \times 21) = 9240 + 21 = 9261$
4. $28^3 = (26 \times 28 \times 30) + (2^2 \times 28) = 21\ 840 + 112 = 21\ 952$
5. $33^3 = (30 \times 33 \times 36) + (3^2 \times 33) = 35\ 640 + 297 = 35\ 937$
6. $39^3 = (38 \times 39 \times 40) + (1^2 \times 39) = 59\ 280 + 39 = 59\ 319$
7. $40^3 = 40 \times 40 \times 40 = 64\ 000$
8. $44^3 = (40 \times 44 \times 48) + (4^2 \times 44) = 84\ 480 + 704 = 85\ 184$
9. $52^3 = (50 \times 52 \times 54) + (2^2 \times 52) = 140\ 400 + 208 = 140\ 608$
10. $56^3 = (52 \times 56 \times 60) + (4^2 \times 56) = 174\ 720 + 896 = 175\ 616$
11. $65^3 = (60 \times 65 \times 70) + (5^2 \times 65) = 273\ 000 + 1\ 625 = 274\ 625$
12. $71^3 = (70 \times 71 \times 72) + (1^2 \times 71) = 357\ 840 + 71 = 357\ 911$
13. $78^3 = (76 \times 78 \times 80) + (2^2 \times 78) = 474\ 240 + 312 = 474\ 552$
14. $85^3 = (80 \times 85 \times 90) + (5^2 \times 85) = 612\ 000 + 2\ 125 = 614\ 125$
15. $87^3 = (84 \times 87 \times 90) + (3^2 \times 87) = 657\ 720 + 783 = 658\ 503$
16. $99^3 = (98 \times 99 \times 100) + (1^2 \times 99) = 970\ 200 + 99 = 970\ 299$

Глава 4. Разделяй и властвуй

ДЕЛЕНИЕ НА ОДНОЗНАЧНОЕ ЧИСЛО

- | | | |
|---|---|---|
| <p>1. $35\frac{3}{9}$
 $9 \overline{)318}$
 $\underline{- 27}$
 48
 $\underline{- 45}$
 3</p> | <p>2. $145\frac{1}{5}$
 $5 \overline{)726}$
 $\underline{- 5}$
 22
 $\underline{- 20}$
 26
 $\underline{- 25}$
 1</p> | <p>3. $61\frac{1}{7}$
 $7 \overline{)428}$
 $\underline{- 42}$
 08
 $\underline{- 7}$
 1</p> |
|---|---|---|

ОТВЕТЫ

$$\begin{array}{r}
 4. \quad 36\frac{1}{8} \\
 8 \overline{)289} \\
 \underline{- 24} \\
 49 \\
 \underline{- 48} \\
 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5. \quad 44\frac{2}{3} \\
 3 \overline{)1328} \\
 \underline{- 12} \\
 \underline{- 12} \\
 08 \\
 \underline{- 6} \\
 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6. \quad 69\frac{5}{4} \\
 4 \overline{)2782} \\
 \underline{- 24} \\
 38 \\
 \underline{- 36} \\
 22 \\
 \underline{- 20} \\
 2
 \end{array}$$

ДЕЛЕНИЕ НА ДВУЗНАЧНЫЕ ЧИСЛА

$$\begin{array}{r}
 1. \quad 43\frac{7}{17} \\
 17 \overline{)738} \\
 \underline{- 68} \\
 58 \\
 \underline{- 51} \\
 7
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2. \quad 24\frac{15}{24} \\
 24 \overline{)591} \\
 \underline{- 48} \\
 111 \\
 \underline{- 96} \\
 15
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3. \quad 4\frac{5}{29} \\
 79 \overline{)321} \\
 \underline{- 316} \\
 5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4. \quad 152\frac{12}{28} \\
 28 \overline{)4268} \\
 \underline{- 28} \\
 146 \\
 \underline{- 140} \\
 68 \\
 \underline{- 56} \\
 12
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5. \quad 655\frac{9}{11} \\
 11 \overline{)7214} \\
 \underline{- 66} \\
 61 \\
 \underline{- 55} \\
 64 \\
 \underline{- 55} \\
 9
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6. \quad 170\frac{14}{18} \\
 18 \overline{)3074} \\
 \underline{- 18} \\
 127 \\
 \underline{- 126} \\
 14
 \end{array}$$

ПРИВЕДЕНИЕ ДРОБЕЙ К ДЕСЯТИЧНОЙ ФОРМЕ

$$1. \quad \frac{2}{5} = 0,40$$

$$2. \quad \frac{4}{7} = 0,571428$$

$$3. \quad \frac{3}{8} = 0,375$$

$$4. \quad \frac{9}{12} = 0,75$$

$$5. \quad \frac{5}{12} = 0,4166$$

$$6. \quad \frac{6}{11} = 0,5454$$

$$7. \quad \frac{14}{24} = 0,5833$$

$$8. \quad \frac{13}{27} = 0,481$$

$$9. \quad \frac{18}{48} = 0,375$$

$$10. \quad \frac{10}{14} = 0,714285$$

$$11. \quad \frac{6}{32} = 0,1875$$

$$12. \quad \frac{19}{45} = 0,422$$

ПРОВЕРКА НА ДЕЛИМОСТЬ

Делимость на 2

1. 53 428

Да

2. 293

Нет

3. 7241

Нет

4. 9846

Да

Делимость на 4

5. 3932

Да

6. 67 348

Да

7. 358

Нет

8. 57 929

Нет

Делимость на 8

9. 59 366

Нет

10. 73 488

Да

11. 248

Да

12. 6111

Нет

Делимость на 3

13. 83 671

Нет: $8 + 3 + 6 + 7 + 1 = 25$

14. 94 737

Да: $9 + 4 + 7 + 3 + 7 = 30$

15. 7359

Да: $7 + 3 + 5 + 9 = 24$

16. 3 267 486

Да: $3 + 2 + 6 + 7 + 4 + 8 + 6 = 36$

Делимость на 6

17. 5334

Да: $5 + 3 + 3 + 4 = 15$

18. 67 386

Да: $6 + 7 + 3 + 8 + 6 = 30$

19. 248

Нет: $2 + 4 + 8 = 14$

20. 5991

Нет: нечетное

Делимость на 9

21. 1234

Нет: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$

22. 8469

Да: $8 + 4 + 6 + 9 = 27$

23. 4 425 575

Нет: $4 + 4 + 2 + 5 + 5 + 7 + 5 = 32$

24. 314 159 265

Да: $3 + 1 + 4 + 1 + 5 + 9 + 2 + 6 + 5 = 36$

ОТВЕТЫ

Делимость на 5

25. $47\ 830$

Да

26. $43\ 762$

Нет

27. $56\ 785$

Да

28. $37\ 210$

Да

Делимость на 11

29. $53\ 867$

Да: $5 - 3 + 8 - 6 + 7 = 11$

30. 4969

Нет: $4 - 9 + 6 - 9 = -8$

31. 3828

Да: $3 - 8 + 2 - 8 = -11$

32. $941\ 369$

Да: $9 - 4 + 1 - 3 + 6 - 9 = 0$

Делимость на 7

33. 5784

Нет: $5784 - 7 = 5777$

$577 - 7 = 570$

57

34. 7336

Да: $7336 + 14 = 7350$

$735 - 35 = 700$

7

35. 875

Да: $875 - 35 = 840$

$84 - 14 = 70$

7

36. 1183

Да: $1183 + 7 = 1190$

$119 + 21 = 140$

14

Делимость на 17

37. 694

Нет: $694 - 34 = 660$

66

38. 629

Да: $629 + 51 = 680$

68

39. 8273

Нет: $8273 + 17 = 8290$

$829 + 51 = 880$

88

40. $13\ 855$

Да: $13\ 855 + 85 = 13\ 940$

$1394 - 34 = 1360$

$136 + 34 = 170$

17

УМНОЖЕНИЕ ДРОБЕЙ

1. $\frac{6}{35}$

2. $\frac{44}{63}$

3. $\frac{18}{28} = \frac{9}{14}$

4. $\frac{63}{80}$

ДЕЛЕНИЕ ДРОБЕЙ

1. $\frac{4}{5}$

2. $\frac{5}{18}$

3. $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

СОКРАЩЕНИЕ ДРОБЕЙ

1. $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$

2. $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$

3. $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$

4. $\frac{5}{2} = \frac{30}{12}$

5. $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

6. $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

7. $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

8. $\frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

СЛОЖЕНИЕ ДРОБЕЙ (С РАВНЫМИ ЗНАМЕНАТЕЛЯМИ)

1. $\frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{7}{9}$

2. $\frac{5}{12} + \frac{4}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

3. $\frac{5}{18} + \frac{6}{18} = \frac{11}{18}$

4. $\frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

СЛОЖЕНИЕ ДРОБЕЙ (С НЕРАВНЫМИ ЗНАМЕНАТЕЛЯМИ)

1. $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$

2. $\frac{1}{6} + \frac{5}{18} = \frac{3}{18} + \frac{5}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$

3. $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{5}{15} + \frac{3}{15} = \frac{8}{15}$

4. $\frac{2}{7} + \frac{5}{21} = \frac{6}{21} + \frac{5}{21} = \frac{11}{21}$

5. $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12}$

6. $\frac{3}{7} + \frac{3}{5} = \frac{15}{35} + \frac{21}{35} = \frac{36}{35}$

7. $\frac{2}{11} + \frac{5}{9} = \frac{18}{99} + \frac{55}{99} = \frac{73}{99}$

ВЫЧИТАНИЕ ДРОБЕЙ

$$1. \frac{8}{11} - \frac{3}{11} = \frac{5}{11}$$

$$2. \frac{12}{7} - \frac{8}{7} = \frac{4}{7}$$

$$3. \frac{13}{18} - \frac{5}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

$$4. \frac{4}{5} - \frac{1}{15} = \frac{12}{15} - \frac{1}{15} = \frac{11}{15}$$

$$5. \frac{9}{10} - \frac{3}{5} = \frac{9}{10} - \frac{6}{10} = \frac{3}{10}$$

$$6. \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}$$

$$7. \frac{7}{8} - \frac{1}{16} = \frac{14}{16} - \frac{1}{16} = \frac{13}{16}$$

$$8. \frac{4}{7} - \frac{2}{5} = \frac{20}{35} - \frac{14}{35} = \frac{6}{35}$$

$$9. \frac{8}{9} - \frac{1}{2} = \frac{16}{18} - \frac{9}{18} = \frac{7}{18}$$

Глава 5. Искусство приближенной оценки

ПРИБЛИЖЕННАЯ ОЦЕНКА ПРИ СЛОЖЕНИИ

Точное решение

$$1. \begin{array}{r} 1479 \\ + 1105 \\ \hline 2584 \end{array}$$

$$2. \begin{array}{r} 57\,293 \\ + 37\,421 \\ \hline 94\,714 \end{array}$$

$$3. \begin{array}{r} 312\,025 \\ + 79\,419 \\ \hline 391\,444 \end{array}$$

$$4. \begin{array}{r} 8\,971\,011 \\ + 4\,016\,367 \\ \hline 12\,987\,378 \end{array}$$

Оценка

$$1. \begin{array}{r} 1500 \text{ или } 1480 \\ + 1100 \\ \hline 2600 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1480 \\ + 1100 \\ \hline 2580 \end{array}$$

$$2. \begin{array}{r} 57\,000 \text{ или } 57\,300 \\ + 37\,000 \\ \hline 94\,000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 57\,300 \\ + 37\,400 \\ \hline 94\,700 \end{array}$$

$$3. \begin{array}{r} 310\,000 \text{ или } 312\,000 \\ + 80\,000 \\ \hline 390\,000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 312\,000 \\ + 79\,000 \\ \hline 391\,000 \end{array}$$

$$4. \begin{array}{r} 9 \text{ миллионов или } 8,9 \text{ миллиона} \\ + 4 \text{ миллиона} \\ \hline 13 \text{ миллионов} \end{array}$$

или $8,97 \text{ миллиона}$

$$\begin{array}{r} 8,9 \text{ миллиона} \\ + 4,0 \text{ миллиона} \\ \hline 12,9 \text{ миллиона} \end{array}$$

или $8,97 \text{ миллиона}$

$$\begin{array}{r} 8,97 \text{ миллиона} \\ + 4,02 \text{ миллиона} \\ \hline 12,99 \text{ миллиона} \end{array}$$

<i>Точное решение</i>	<i>Оценка</i>
\$2,67	\$2,50
1,95	2,00
7,35	7,50
9,21	9,00
0,49	0,50
11,21	11,00
0,12	0,00
6,14	6,00
<u>8,31</u>	<u>8,50</u>
\$47,35	\$47,00

ПРИБЛИЖЕННАЯ ОЦЕНКА ПРИ ВЫЧИТАНИИ

Точное решение

1. 4926	2. 67 221	3. 526 978	4. 8 349 241
<u>- 1659</u>	<u>- 9 874</u>	<u>- 42 009</u>	<u>- 6 103 839</u>
3267	57 347	484 969	2 245 402

Оценка

1. 4900	2. 67 000	<i>или</i> 67 200
<u>- 1700</u>	<u>- 10 000</u>	<u>- 9 900</u>
3200	57 000	57 300

3. 530 000	<i>или</i> 527 000
<u>- 40 000</u>	<u>- 42 000</u>
490 000	485 000

4. 8,3 миллиона	<i>или</i> 8,35 миллиона
<u>- 6,1 миллиона</u>	<u>- 6,10 миллиона</u>
2,2 миллиона	2,25 миллиона

ПРИБЛИЖЕННАЯ ОЦЕНКА ПРИ ДЕЛЕНИИ

Точное решение

$$1. \begin{array}{r} 625,57 \\ 7 \overline{)4379} \end{array} \quad 2. \begin{array}{r} 4\,791,6 \\ 5 \overline{)23\,958} \end{array} \quad 3. \begin{array}{r} 42\,247,15 \\ 13 \overline{)549\,213} \end{array}$$

$$4. \begin{array}{r} 17\,655,21 \\ 289 \overline{)5\,102\,357} \end{array} \quad 5. \begin{array}{r} 40,90 \\ 203\,637 \overline{)8\,329\,483} \end{array}$$

Оценка

$$1. \begin{array}{r} 630 \\ 7 \overline{)4400} \end{array} \quad 2. \begin{array}{r} 4\,800 \\ 5 \overline{)24\,000} \end{array} \quad 3. \begin{array}{r} 42\,000 \\ 13 \overline{)550\,000} \end{array}$$

$$4. \begin{array}{r} 17\,000 \\ \approx 300 \overline{)5\,100\,000} = 3 \overline{)51\,000} \end{array} \quad 5. \begin{array}{r} 40 \\ \approx 200\,000 \overline{)8\,000\,000} = 200 \overline{)8000} \end{array}$$

ПРИБЛИЖЕННАЯ ОЦЕНКА ПРИ УМНОЖЕНИИ

Точное решение

$$1. \begin{array}{r} 98 \\ \times 27 \\ \hline 2646 \end{array} \quad 2. \begin{array}{r} 76 \\ \times 42 \\ \hline 3192 \end{array} \quad 3. \begin{array}{r} 88 \\ \times 88 \\ \hline 7744 \end{array} \quad 4. \begin{array}{r} 539 \\ \times 17 \\ \hline 9163 \end{array}$$

$$5. \begin{array}{r} 312 \\ \times 98 \\ \hline 30\,576 \end{array} \quad 6. \begin{array}{r} 639 \\ \times 107 \\ \hline 68\,373 \end{array} \quad 7. \begin{array}{r} 428 \\ \times 313 \\ \hline 133\,964 \end{array} \quad 8. \begin{array}{r} 51\,276 \\ \times 489 \\ \hline 25\,073\,964 \end{array}$$

$$9. \begin{array}{r} 104\,972 \\ \times 11\,201 \\ \hline 1\,175\,791\,372 \end{array} \quad 10. \begin{array}{r} 5\,462\,741 \\ \times 203\,413 \\ \hline 1\,111\,192\,535\,033 \end{array}$$

Оценка

$$1. \begin{array}{r} 100 \\ \times 25 \\ \hline 2500 \end{array} \quad 2. \begin{array}{r} 78 \\ \times 40 \\ \hline 3120 \end{array}$$

$$3. \begin{array}{r} 90 \\ \times 86 \\ \hline 7740 \end{array} \quad 4. \begin{array}{r} 540 \\ \times 17 \\ \hline 9180 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5. \quad 310 \\ \times 100 \\ \hline 31\,000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6. \quad 646 \text{ или } 640 \\ \times 100 \quad \times 110 \\ \hline 64\,600 \quad 70\,400 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7. \quad 430 \\ \times 310 \\ \hline 133\,300 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8. \quad 51\,000 \\ \times 490 \\ \hline 24\,990\,000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9. \quad 105\,000 \\ \times 11\,000 \\ \hline 1155 \text{ миллионов} \\ = 1,155 \text{ миллиардов} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10. \quad 5\,500\,000 \\ \times 200\,00 \\ \hline 1100 \text{ миллиардов} \\ = 1,1 \text{ триллиона} \end{array}$$

ОЦЕНКА КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ

Точное решение (до двух десятичных знаков)

$$1. \quad \sqrt{4,12} \quad 2. \quad \sqrt{5,91} \quad 3. \quad \sqrt{12,76} \quad 4. \quad \sqrt{65,41} \quad 5. \quad \sqrt{89,66}$$

Деление и среднее

$$1. \quad \begin{array}{r} 4,2 \\ 4 \overline{)17} \end{array} \quad \frac{4 + 4,2}{2} = 4,1$$

$$2. \quad \begin{array}{r} 5,8 \\ 6 \overline{)35} \end{array} \quad \frac{6 + 5,8}{2} = 5,9$$

$$3. \quad \begin{array}{r} 16,3 \\ 10 \overline{)163} \end{array} \quad \frac{10 + 16,3}{2} = 13,15$$

$$4. \quad \begin{array}{r} 71 \\ 60 \overline{)4279} \end{array} \quad \frac{60 + 71}{2} = 65,5$$

$$5. \quad \begin{array}{r} 89 \\ 90 \overline{)8039} \end{array} \quad \frac{90 + 89}{2} = 89,5$$

ПОВСЕДНЕВНАЯ МАТЕМАТИКА

1. $8,80 + 4,40 = 13,20$.

2. $5,30 + 2,65 = 7,95$.

3. $74 \div 2 \div 2 = 37 \div 2 = 18,50$.

4. Поскольку $70 \div 10 = 7$, то потребуется **7** лет.

5. Поскольку $70 \div 6 = 11,67$, то понадобится **12** лет.
6. Поскольку $110 \div 7 = 15,714$, то потребуется **16** лет.
7. Поскольку $70 \div 7 = 10$, то потребуется **10** лет для удвоения вклада и затем еще **10** лет для повторного удвоения. Поэтому для увеличения суммы в **4** раза понадобится **20** лет.
8.
$$M = \frac{\$100\,000(0,0075)(1,0075)^{120}}{(1,00333)^{120} - 1} = \frac{\$750(2,451)}{1,451} = \$1267$$
9.
$$M = \frac{\$30\,000(0,004167)(1,004167)^{42}}{(1,004167)^{42} - 1} = \frac{\$125(1,22)}{0,22} = \$693$$

Глава 6. Математика с ручкой и бумагой

СТОЛБЦЫ ЧИСЕЛ

- | | |
|---|--|
| <p>1. $672 \rightarrow 6$</p> <p>$1\,367 \rightarrow 8$</p> <p>$107 \rightarrow 8$</p> <p>$7\,845 \rightarrow 6$</p> <p>$358 \rightarrow 7$</p> <p>$210 \rightarrow 3$</p> <p>$+ 916 \rightarrow 7$</p> <hr style="width: 100%;"/> <p>$11\,475 \rightarrow 9$</p> | <p>2. $\\$ 21,56 \rightarrow 5$</p> <p>$19,38 \rightarrow 3$</p> <p>$211,02 \rightarrow 6$</p> <p>$9,16 \rightarrow 7$</p> <p>$26,17 \rightarrow 7$</p> <p>$1,43 \rightarrow 3$</p> <hr style="width: 100%;"/> <p>$\\$288,72 \rightarrow 9$</p> |
|---|--|

ВЫЧИТАНИЕ НА БУМАГЕ

- | | |
|--|---|
| <p>1. $75\,423 \rightarrow 3$</p> <p>$- 46\,298 \rightarrow 2$</p> <hr style="width: 100%;"/> <p>$29\,125 \rightarrow 1$</p> | <p>2. $876\,452 \rightarrow 5$</p> <p>$- 593\,876 \rightarrow 2$</p> <hr style="width: 100%;"/> <p>$282\,576 \rightarrow 3$</p> |
| <p>3. $3\,249\,202 \rightarrow 4$</p> <p>$- 2\,903\,445 \rightarrow 9$</p> <hr style="width: 100%;"/> <p>$345\,757 \rightarrow 4$</p> | <p>4. $45\,394\,358 \rightarrow 5$</p> <p>$- 36\,472\,659 \rightarrow 6$</p> <hr style="width: 100%;"/> <p>$8\,921\,699 \rightarrow 8$</p> |

ВЫЧИСЛЕНИЕ КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ

1.
$$\begin{array}{r} 3, 8 7 \\ \sqrt{15,0000} \\ 3^2 = \underline{9} \\ 600 \\ 68 \times 8 = \underline{544} \\ 5600 \\ 767 \times 7 = \underline{5369} \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{r} 2 2, 4 0 \\ \sqrt{502,0000} \\ 2^2 = \underline{4} \\ 102 \\ 42 \times 2 = \underline{84} \\ 1800 \\ 444 \times 4 = \underline{1776} \\ 2400 \\ 4480 \times 0 = \underline{0} \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{r} 2 0, 9 5 \\ \sqrt{439,2000} \\ 2^2 = \underline{4} \\ 039 \\ 40 \times 0 = \underline{0} \\ 3920 \\ 409 \times 9 = \underline{3681} \\ 23900 \\ 4480 \times 0 = \underline{20925} \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{r} 1 9 \text{ точный корень} \\ \sqrt{361} \\ 1^2 = \underline{1} \\ 261 \\ 29 \times 9 = \underline{261} \\ 0 \end{array}$$

УМНОЖЕНИЕ НА БУМАГЕ

1.
$$\begin{array}{r} 54 \rightarrow 9 \\ \times 37 \rightarrow 1 \\ \hline 1998 \rightarrow 9 \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{r} 273 \rightarrow 3 \\ \times 217 \rightarrow 1 \\ \hline 59241 \rightarrow 3 \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{r} 725 \rightarrow 5 \\ \times 609 \rightarrow 6 \\ \hline 441525 \rightarrow 3 \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{r} 3309 \rightarrow 6 \\ \times 2868 \rightarrow 6 \\ \hline 9490212 \rightarrow 9 \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{r} 52819 \rightarrow 7 \\ \times 47820 \rightarrow 3 \\ \hline 2525804580 \rightarrow 3 \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{r} 3923759 \rightarrow 3 \\ \times 2674093 \rightarrow 4 \\ \hline 10492496475587 \rightarrow 3 \end{array}$$

Глава 8. Сложное делаем легким

КВАДРАТЫ ЧЕТЫРЕХЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

1. **1 234²**

+234	1 468	Reach off
-234	1 000	

$$\begin{array}{r} 1\ 468\ 000 \\ +\ 54\ 756\ (234^2) \\ \hline 1\ 522\ 756 \end{array}$$
 $\leftarrow 234^2$

+34	268	
-34	200	

$$\begin{array}{r} 53\ 600 \\ +\ 1\ 156\ (34^2) \\ \hline 54\ 756 \end{array}$$

2. **8 639²**

+361	9 000	Lesson
-361	8 278	

$$\begin{array}{r} 74\ 502\ 000 \\ +\ 130\ 321\ (361^2) \\ \hline 74\ 632\ 321 \end{array}$$
 $\leftarrow 361^2$

+39	400	
-39	322	

$$\begin{array}{r} 128\ 800 \\ +\ 1\ 521\ (39^2) \\ \hline 130\ 321 \end{array}$$

3. **5 312²**

+312	5 624	Tons
-312	5 000	

$$\begin{array}{r} 28\ 120\ 000 \\ +\ 97\ 344\ (312^2) \\ \hline 28\ 217\ 344 \end{array}$$
 $\leftarrow 312^2$

+12	324	
-12	300	

$$\begin{array}{r} 97\ 200 \\ +\ 144\ (12^2) \\ \hline 97\ 344 \end{array}$$

4. **9 863²**

+137	10 000	Nachos
-137	9 726	

$$\begin{array}{r} 97\ 260\ 000 \\ +\ 18\ 769\ (137^2) \\ \hline 97\ 278\ 769 \end{array}$$
 $\leftarrow 137^2$

+37	174	
-37	100	

$$\begin{array}{r} 17\ 400 \\ +\ 1\ 369\ (37^2) \\ \hline 18\ 769 \end{array}$$

5. **3 618²**

+382	4 000	Prayer
-382	3 236	

$$\begin{array}{r} 12\ 944\ 000 \\ +\ 145\ 924\ (382^2) \\ \hline 13\ 089\ 924 \end{array}$$
 $\leftarrow 382^2$

+18	400	
-18	364	

$$\begin{array}{r} 145\ 600 \\ +\ 324\ (18^2) \\ \hline 145\ 924 \end{array}$$

6. **2 971²** (Мнемоника не нужна)

+29	3 000	
-29	2 942	

$$\begin{array}{r} 8\ 826\ 000 \\ +\ 841\ (29^2) \\ \hline 8\ 826\ 841 \end{array}$$

**УМНОЖЕНИЕ «3 НА 2» С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ
РАЗЛОЖЕНИЯ, СЛОЖЕНИЯ И ВЫЧИТАНИЯ**

1.
$$\begin{array}{r} 858 \\ \times 15 \quad (5 \times 3) \\ \hline 858 \times 15 = 858 \times 5 \times 3 = \\ 4\,290 \times 3 = 12\,870 \end{array}$$
2.
$$\begin{array}{r} 796 \quad (800 - 4) \\ \times 19 \\ \hline 800 \times 19 = 15\,200 \\ -4 \times 19 = -76 \\ \hline 15\,124 \end{array}$$
3.
$$\begin{array}{r} 148 \\ \times 62 \quad (60 + 2) \\ \hline 148 \times 60 = 8\,880 \\ 148 \times 2 = + 296 \\ \hline 9\,176 \end{array}$$
- или
$$\begin{array}{r} 148 \quad (74 \times 2) \\ \times 62 \quad (60 + 2) \\ \hline 62 \times 148 = 62 \times 74 \times 2 = \\ 4\,588 \times 2 = 9\,176 \end{array}$$
4.
$$\begin{array}{r} 773 \\ \times 42 \quad (7 \times 6) \\ \hline 773 \times 42 = 773 \times 7 \times 6 = \\ 5\,411 \times 6 = 32\,466 \end{array}$$
5.
$$\begin{array}{r} 906 \quad (900 + 6) \\ \times 46 \\ \hline 900 \times 46 = 41\,400 \\ 6 \times 46 = + 276 \\ \hline 41\,676 \end{array}$$
6.
$$\begin{array}{r} 952 \quad (950 + 2) \\ \times 26 \\ \hline 950 \times 26 = 24\,700 \\ 2 \times 26 = + 52 \\ \hline 24\,752 \end{array}$$
7.
$$\begin{array}{r} 411 \quad (410 + 1) \\ \times 93 \\ \hline 410 \times 93 = 38\,130 \\ 1 \times 93 = + 93 \\ \hline 38\,223 \end{array}$$
8.
$$\begin{array}{r} 967 \\ \times 51 \quad (50 + 1) \\ \hline 50 \times 967 = 48\,350 \\ 1 \times 967 = + 967 \\ \hline 49\,317 \end{array}$$
9.
$$\begin{array}{r} 484 \\ \times 75 \quad (5 \times 5 \times 3) \\ \hline 484 \times 75 = 484 \times 5 \times 5 \times 3 = \\ 2\,420 \times 5 \times 3 = 12\,100 \times 3 = \\ 36\,300 \end{array}$$

ОТВЕТЫ

10. $126(9 \times 7 \times 2)$
 $\times 87$
 $126 \times 87 = 87 \times 9 \times 7 \times 2 =$
 $783 \times 7 \times 2 = 5481 \times 2 =$
 10962
11. 157
 $\times 33(11 \times 3)$
 $157 \times 33 = 157 \times 11 \times 3 =$
 $1727 \times 3 = 5181$
12. $616(610+6)$
 $\times 37$
 $610 \times 37 = 22570$
 $6 \times 37 = + 222$
 22792
13. 841
 $\times 72(9 \times 8)$
 $841 \times 72 = 841 \times 9 \times 8 =$
 $7569 \times 8 = 60552$
14. $361(360+1)$
 $\times 41$
 $360 \times 41 = 14760$
 $1 \times 41 = + 41$
 14801
15. 218
 $\times 68(70-2)$
 $70 \times 218 = 15260$
 $-2 \times 218 = - 436$
 14824
16. $538(540-2)$ или $538(530+8)$
 $\times 53$
 $540 \times 53 = 28620$
 $-2 \times 53 = - 106$
 28514
- $\times 53$
 $530 \times 53 = 28090$
 $8 \times 53 = + 424$
 28514
17. 817
 $\times 61(60+1)$
 $60 \times 817 = 49020$
 $1 \times 817 = + 817$
 49837
18. 668
 $\times 63(9 \times 7)$
 $668 \times 63 = 668 \times 9 \times 7 =$
 $6012 \times 7 = 42084$
19. $499(500-1)$
 $\times 25$
 $500 \times 25 = 12500$
 $-1 \times 25 = - 25$
 12475
20. 144
 $\times 56(7 \times 8)$
 $144 \times 56 = 144 \times 7 \times 8 =$
 $1008 \times 8 = 8064$

21.
$$\begin{array}{r} 281 \\ \times 44 \quad (11 \times 4) \\ \hline 281 \times 44 = 281 \times 11 \times 4 = \\ 3\ 091 \times 4 = 12\ 364 \end{array}$$
 или
$$\begin{array}{r} 281 \quad (280 + 1) \\ \times 44 \\ \hline 280 \times 44 = 12\ 320 \\ 1 \times 44 = + 44 \\ \hline 12\ 364 \end{array}$$
22.
$$\begin{array}{r} 988 \quad (1000 - 12) \\ \times 22 \\ \hline 1000 \times 22 = 22\ 000 \\ -12 \times 22 = - 264 \\ \hline 21\ 736 \end{array}$$
 23.
$$\begin{array}{r} 383 \\ \times 49 \quad (7 \times 7) \\ \hline 383 \times 49 = 383 \times 7 \times 7 = \\ 2\ 681 \times 7 = 18\ 767 \end{array}$$
24.
$$\begin{array}{r} 589 \quad (600 - 11) \\ \times 87 \\ \hline 600 \times 87 = 52\ 200 \\ 11 \times -87 = - 957 \\ \hline 51\ 243 \end{array}$$
 25.
$$\begin{array}{r} 286 \\ \times 64 \quad (8 \times 8) \\ \hline 286 \times 64 = 286 \times 8 \times 8 = \\ 2\ 288 \times 8 = 18\ 304 \end{array}$$
26.
$$\begin{array}{r} 853 \\ \times 32 \quad (8 \times 4) \\ \hline 853 \times 32 = 853 \times 8 \times 4 = \\ 6\ 824 \times 4 = 27\ 296 \end{array}$$
 27.
$$\begin{array}{r} 878 \\ \times 24 \quad (8 \times 3) \\ \hline 878 \times 24 = 878 \times 8 \times 3 = \\ 7\ 024 \times 3 = 21\ 072 \end{array}$$
28.
$$\begin{array}{r} 423 \quad (47 \times 9) \\ \times 65 \\ \hline 423 \times 65 = 65 \times 47 \times 9 = \\ 3\ 055 \times 9 = 27\ 495 \end{array}$$
 29.
$$\begin{array}{r} 154 \quad (11 \times 14) \\ \times 19 \\ \hline 154 \times 19 = 19 \times 11 \times 14 = \\ 209 \times 7 \times 2 = 1463 \times 2 = \\ 2926 \end{array}$$
30.
$$\begin{array}{r} 834 \quad (800 + 34) \\ \times 34 \\ \hline 800 \times 34 = 27\ 200 \\ 34 \times 34 = + 1\ 156 \\ \hline 28\ 356 \end{array}$$
 31.
$$\begin{array}{r} 545 \\ \times 27 \quad (9 \times 3) \\ \hline 545 \times 27 = 545 \times 9 \times 3 = \\ 4\ 905 \times 3 = 14\ 715 \end{array}$$

3. $58\ 324^2$

$$\begin{array}{r} 324\ (9 \times 6 \times 6) \\ \times \quad 58 \\ \hline \end{array}$$

$$324 \times 58 = 58 \times 9 \times 6 \times 6 = 522 \times 6 \times 6 = 3\ 132 \times 6 = 18\ 792$$

Liver

$$18\ 792 \times 2\ 000 = \quad 37\ 584\ 000$$

$$58\ 000^2 = +\ 3\ 364\ 000\ 000$$

$$3\ 401\ 584\ 000$$

$$324^2 = +\ \underline{104\ 976}$$

$$3\ 401\ 688\ 976$$

$$\begin{array}{r} +24 \quad 348 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 324^2 \quad 104\ 400\ (348 \times 300) \\ \swarrow \quad \searrow \\ -24 \quad 300 \\ \underline{+ \quad 576\ (24^2)} \\ 104\ 976 \end{array}$$

4. $62\ 457^2$

457

$$\times \quad 62\ (60 + 2)$$

$$60 \times 457 = \quad 27\ 420$$

$$2 \times 457 = +\ \underline{914}$$

Judge off

$$28\ 334 \times 2\ 000 = 56\ 668\ 000$$

56 668 000

$$62\ 000^2 = +\ 3\ 844\ 000\ 000$$

$$3\ 900\ 668\ 000$$

$$457^2 = +\ \underline{208\ 849}$$

$$3\ 900\ 876\ 849$$

$$\begin{array}{r} +43 \quad 500 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 457^2 \quad 207\ 000\ (500 \times 414) \\ \swarrow \quad \searrow \\ -43 \quad 414 \\ \underline{+ \quad 1\ 849\ (43^2)} \\ 208\ 849 \end{array}$$

5. $89\,854^2$

$$\begin{array}{r}
 854 \\
 \times 89(90-1) \\
 \hline
 90 \times 854 = 76\,860 \\
 -1 \times 854 = -854 \\
 \hline
 76\,006 \times 2\,000 = 152\,012\,000
 \end{array}$$

Stone

$$\begin{array}{r}
 152\,012\,000 \\
 89\,000^2 = +7\,921\,012\,000 \\
 \hline
 8\,073\,012\,000 \\
 854^2 = + \quad 729\,316 \\
 \hline
 8\,073\,741\,316
 \end{array}$$

854^2

$\begin{array}{l} +46 \\ -46 \end{array}$

$\begin{array}{l} 900 \\ 808 \end{array}$

$727\,200 (900 \times 808)$
 $+ 2\,116 (46^2)$
 \hline
 $729\,316$

6. $76\,934^2$

$$\begin{array}{r}
 934(930+4) \\
 \times 76 \\
 \hline
 930 \times 76 = 70\,680 \\
 4 \times 76 = + 304 \\
 \hline
 76\,984 \times 2\,000 = 141\,968\,000
 \end{array}$$

Pie Chief

$$\begin{array}{r}
 141\,968\,000 \\
 76\,000^2 = +5\,776\,000\,000 \\
 \hline
 5\,917\,968\,000 \\
 934^2 = + \quad 872\,356 \\
 \hline
 5\,918\,840\,356
 \end{array}$$

934^2

$\begin{array}{l} +34 \\ -34 \end{array}$

$\begin{array}{l} 968 \\ 900 \end{array}$

$871\,200 (968 \times 900)$
 $+ 1\,156 (34^2)$
 \hline
 $872\,356$

УМНОЖЕНИЕ ТИПА «3 НА 3»

1. $644 (640 + 4)$ или $644 (7 \times 92)$
 $\times \quad 286$ $\times \quad 286$

$640 \times 286 = 183\,040 (8 \times 8 \times 10)$

$4 \times 200 = + \quad 800$

$183\,840$

$4 \times 86 = + \quad 344$

$184\,184$

$684 \times 286 = 286 \times 7 \times 92 =$

$2\,002 \times 92 = 184\,184$

2. $596 (600 - 4)$ 3.

$\times \quad 167$

$600 \times 167 = 100\,200$

$-4 \times 167 = - \quad 668$

$99\,532$

853

$\times \quad 325 (320 + 5)$

$320 \times 853 = 272\,960$

$5 \times 800 = + \quad 4\,000$

$276\,960$

$5 \times 53 = + \quad 265$

$277\,225$

4. $343 (7 \times 7 \times 7)$

$\times \quad 226$

$343 \times 226 = 226 \times 7 \times 7 \times 7 =$

$1\,582 \times 7 \times 7 = 11\,074 \times 7 = 77\,518$

5. $809 (800 + 9)$

$\times \quad 527$

$800 \times 527 = 421\,600$

$9 \times 527 = + \quad 4\,743$

$426\,343$

6. $942 (+42)$

$\times \quad 879 (-21)$

$900 \times 921 = 828\,900$

$-21 \times 42 = - \quad 882$

$828\,018$

ОТВЕТЫ

$$\begin{array}{r}
 7. \qquad \qquad \qquad 692 (+8) \\
 \qquad \qquad \qquad \times \underline{644 (-56)} \\
 700 \times 636 = 445\,200 \\
 (-8) \times (-56) = + \underline{448} \\
 \qquad \qquad \qquad 445\,648
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 8. \qquad \qquad \qquad 446 \\
 \qquad \qquad \qquad \times \underline{176 (11 \times 8 \times 2)}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 446 \times 176 &= 446 \times 11 \times 8 \times 2 = \\
 4\,906 \times 8 \times 2 &= 39\,248 \times 2 = 78\,496
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 9. \qquad \qquad \qquad 658 (47 \times 7 \times 2) \\
 \qquad \qquad \qquad \times \underline{468 (52 \times 9)}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 658 \times 468 &= 52 \times 47 \times 9 \times 7 \times 2 = \\
 2\,444 \times 9 \times 7 \times 2 &= 21\,996 \times 7 \times 2 = \\
 153\,972 \times 2 &= 307\,944
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 10. \qquad \qquad 273 (91 \times 3) \\
 \qquad \qquad \times \underline{138 (46 \times 3)}
 \end{array}$$

$$273 \times 138 = 91 \times 46 \times 9 = 4\,186 \times 9 = 37\,674$$

$$\begin{array}{r}
 11. \qquad \qquad \qquad 824 \\
 \qquad \qquad \qquad \times \underline{206 (412^2)} \\
 400 \times 424 = 169\,600 \\
 12 \times 12 = + \underline{144} \\
 \qquad \qquad \qquad 169\,744
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 12. \qquad 642 (107 \times 6) \\
 \qquad \times \underline{249 (83 \times 3)}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 642 \times 249 &= 107 \times 83 \times 18 = 8\,881 \times 9 \times 2 = \\
 79\,929 \times 2 &= 159\,858
 \end{aligned}$$

13. **783 (87 × 9)**

× 589

783 × 589 = 589 × 87 × 9 = 51 243 × 9 = 461 187

14. **871 (-29)**

× 926 (+26)

900 × 897 = 807 300

-29 × 26 = - 754

806 546

15. **341**

× 715

7 × 341 = 2 387

3 × 15 = + 45

2 432 × 100 = 243 200

41 × 15 = + 615

243 815

16. **417**

× 298 (300 - 2)

300 × 417 = 125 100

-2 × 417 = - 834

124 266

17. **557**

× 756 (9 × 84)

557 × 756 = 557 × 9 × 84 = 5 013 × 7 × 6 × 2 =

35 091 × 6 × 2 = 210 546 × 2 = 421 092

18. **976 (1000 - 24)**

× 878

878 × 1 000 = 878 000

-878 × 24 = - 21 072

856 928

19. 765

$$\times \underline{350} \quad (7 \times 5 \times 10)$$

$$765 \times 350 = 765 \times 7 \times 5 \times 10 = 5\,355 \times 5 \times 10 = \\ 26\,775 \times 10 = 267\,750$$

20. 154 (11 × 14)

$$\times \underline{423} \quad (47 \times 9)$$

$$154 \times 423 = 47 \times 11 \times 9 \times 14 = 517 \times 9 \times 7 \times 2 = \\ 4\,653 \times 2 \times 7 = 9\,306 \times 7 = 65\,142$$

21. 545 (109 × 5)

$$\times \underline{834}$$

$$100 \times 834 = 83\,400$$

$$9 \times 834 = \underline{+ 7\,506}$$

$$90\,906 \times 5 = 454\,530$$

22. 216 (6 × 6 × 6)

$$\times \underline{653}$$

$$216 \times 653 = 653 \times 6 \times 6 \times 6 =$$

$$3\,918 \times 6 \times 6 = 23\,508 \times 6 = 141\,048$$

23. 393 (400 - 7)

$$\times \underline{822}$$

$$400 \times 822 = 328\,800$$

$$-7 \times 822 = \underline{- 5\,754}$$

$$323\,046$$

УМНОЖЕНИЕ ТИПА «5 НА 5»

1. 65 154

× 19 423

Neck ripple

$$423 \times 65 = 27\,495$$

$$154 \times 19 = + 2\,926$$

Mouse round

$$30\,421 \times 1\,000 = 30\,421\,000$$

$$65 \times 19 \times 1 \text{ МИЛЛИОН} = + 1\,235\,000\,000$$

$$1\,265\,421\,000$$

$$154 \times 423 = + 65\,142$$

$$1\,265\,486\,142$$

2. 34 545

× 27 834

Knife mulch

$$834 \times 34 = 28\,356$$

$$545 \times 27 = + 14\,715$$

Room scout

$$43\,071 \times 1\,000 = 43\,071\,000$$

$$34 \times 27 \times 1 \text{ МИЛЛИОН} = + 918\,000\,000$$

$$961\,071\,000$$

$$834 \times 545 = + 454\,530$$

$$961\,525\,530$$

3. 69 216

× 78 653

Roll silk

$$653 \times 69 = 45\,057$$

$$216 \times 78 = + 16\,848$$

Shoot busily

$$61\,905 \times 1\,000 = 61\,905\,000$$

$$69 \times 78 \times 1 \text{ МИЛЛИОН} = + 5\,382\,000\,000$$

$$5\,443\,905\,000$$

$$216 \times 653 = + 141\,048$$

$$5\,444\,046\,048$$

4. 95 393

× 81 822

Cave soups

$$822 \times 95 = 78\,090$$

$$393 \times 81 = \underline{+31\,833}$$

Toss-up Panama

$$109\,923 \times 1\,000 = 109\,923\,000$$

$$95 \times 81 \times 1 \text{ миллион} = \underline{+7\,804\,000\,000}$$

$$7\,804\,923\,000$$

$$393 \times 822 = \underline{+323\,046}$$

$$7\,805\,246\,046$$

Глава 9. Искусство математической магии

ДЕНЬ ДЛЯ ЛЮБОЙ ДАТЫ

1. 19 января 2007 — пятница: $6 + 19 + 1 = 26$; $26 - 21 = 5$.
2. 14 февраля 2012 — вторник: $1 + 14 + 1 = 16$; $16 - 14 = 2$.
3. 20 июня 1993 — воскресенье: $3 + 5 + 20 = 28$; $28 - 28 = 0$.
4. 1 сентября 1983 — четверг: $4 + 1 + 6 = 11$; $11 - 7 = 4$.
5. 8 сентября 1954 — среда: $4 + 8 + 5 = 17$; $17 - 14 = 3$.
6. 19 ноября 1863 — четверг: $2 + 19 + 4 = 25$; $25 - 21 = 4$.
7. 4 июля 1776 — четверг: $5 + 4 + 2 = 11$; $11 - 7 = 4$.
8. 22 февраля 2222 — пятница: $2 + 22 + 2 = 26$; $26 - 21 = 5$.
9. 31 июня 2468 — такого дня не существует (в июне только 30 дней!). Но 30 июня 2468 — суббота, поэтому следующий день воскресенье.
10. 1 января 2358 — среда: $6 + 1 + 3 = 10$; $10 - 7 = 3$.

Библиография

БЫСТРЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ*

- Катлер Э., Мак-Шейн Р. Система быстрого счета по Трахтенбергу. М.: Просвещение, 1967.
- Devi, Shakuntala. Figuring: The Joys of Numbers. New York: Basic Books, 1964.
- Doerfler, Ronald W. Dead Reckoning: Calculating Without Instruments. Houston: Gulf Publishing Company, 1993.
- Flansburg, Scott, and Victoria Hay. Math Magic. New York: William Morrow and Co., 1993.
- Хэндли Б. Считать в уме как компьютер. Минск : «Попурри», 2006.
- Julius, Edward H. Rapid Math Tricks and Tips: 30 Days to Number Power. New York: John Wiley & Sons, 1992.
- Lucas, Jerry. Becoming a Mental Math Wizard. Crozet, Virginia: Shoe Tree Press, 1991.
- Menninger, K. Calculator's Cunning. New York: Basic Books, 1964.

* В разделе библиографии собраны книги известных молниеносных вычислителей (по терминологии данной книги). Сведения о самих молниеносных вычислителях можно найти в книге *Степанов О. Люди-счетчики (Правда и вымыслы)* (2002), адрес сайта, на котором доступна эта книга: <http://www.klex.ru/fl> и на сайте <http://xage.ru/samyie-izvestnyie-lyudi-schetchiki/>. *Прим. ред.*

Библиография

- Smith, Steven B. *The Great Mental Calculators: The Psychology, Methods, and Lives of Calculating Prodigies, Past and Present.* New York: Columbia University Press, 1983.
- Sticker, Henry. *How to Calculate Quickly.* New York: Dover, 1955.
- Stoddard, Edward. *Speed Mathematics Simplified.* New York: Dover, 1994.
- Tirtha, Jagadguru Swami Bharati Krishna, Shankaracharya of Govardhana Pitha. *Vedic Mathematics or "Sixteen Simple Mathematical Formulae from the Vedas."* Banaras, India: Hindu University Press, 1965.

ПАМЯТЬ*

- Lorayne, Harry, and Jerry Lucas. *The Memory Book.* New York: Ballantine Books, 1974**.
- Sanstrom, Robert. *The Ultimate Memory Book.* Los Angeles: Stepping Stone Books, 1990.

* См. также книги на русском языке по развитию памяти и мнемонике: *Фоер Дж. Эйнштейн гуляет по Луне. Наука и искусство запоминания.* М.: «Альпина паблишер», 2013; *Лурия А. Маленькая книжка о большой памяти. Ум мнемониста.* М.: Изд-во МГУ, 1968; *Степанов О. Мнемоника (Правда и вымысел).* 1997, адрес сайта, на котором доступна эта книга: <http://www.koob.ru/stepanov/>. Этой тематике также посвящены два сайта: сайт «Мнемоника.ру. Развитие памяти и внимания в сети»: <http://www.mnemonica.ru/>; сайт «Тренировка памяти: развитие и улучшение, методики и техники»: <http://www.remember-all.ru/>. *Прим. ред.*

** См. также другие книги автора: *Лорейн Г. Развитие памяти и способности концентрироваться.* Минск : Попурри, 2008; *Лорейн Г. Суперпамять. Развитие феноменальной памяти.* М.: Эксмо, 2009; *Лорейн Г. Как тренировать память.* Минск : Попурри, 2010. *Прим. ред.*

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА*

Гарднер М. Математические чудеса и тайны. Математические фокусы и головоломки. М.: Наука, 1978.)

Гарднер М. Математические головоломки и развлечения (2-е издание). М. : Мир, 1999.

Гарднер М. Математические досуги. М.: Мир, 1972.

Гарднер М. Математические новеллы. М.: Мир, 1974.**

Huff, Darrell. How to Lie with Statistics. New York: Norton, 1954.***

* «Классическая» книга, недавно переизданная, по занимательной математике: *Перельман Я. И.* Веселые задачи. — М.: Астрель, АСТ, Транзиткнига, 2003. Еще одна книга по этой тематике: *Гамов Г., Стерн М.* Занимательная математика. Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 1999.

** В этом разделе даны ссылки на 44 книги Мартина Гарднера. На русском языке изданы 177 его книг. Приведем список нескольких из них, которые относятся к теме занимательной математики. *Гарднер М.* А ну-ка, догадайся! М.: Мир, 1984. *Мартин Гарднер.* Крестики-нолики. М.: Мир, 1988; *Гарднер М.* Классические головоломки. М.: АСТ, Астрель, 2007; *Гарднер М.* Нескучная математика. Калейдоскоп головоломок. М.: АСТ, Астрель, 2008; *Гарднер М.* Лучшие математические игры и головоломки, или самый настоящий математический цирк. М.: АСТ, Астрель, 2009; *Гарднер М.* 10000 развивающих головоломок, математических загадок и ребусов для детей и взрослых. М.: АСТ, Астрель, 2010; *Гарднер М.* Когда ты была рыбкой, головастиком — я... и другие размышления о всякой всячине. М. : КоЛибри, 2010. *Прим. ред.*

*** Несмотря на огромное количество ссылок на эту знаменитую книгу в русскоязычной научной и околонуучной литературе, ее перевод появился только в 1991 году под странным названием «Как лежать со статистикой» в издательстве «Пингвин-бизнес» и только в электронном варианте в формате PDF. Адрес сайта, где можно купить эту книгу: <http://ru.aliexpress.com/item/EBOOK-PDF-How-to-Lie-with-Statistics-Penguin-Business-Darrell-Huff/1781086441.html>. *Прим. ред.*

Библиография

Paulos, John Allen. *Innumeracy: Mathematical Illiteracy and Its Consequences*. New York: Hill and Wang, 1988.

Stewart, Ian. *Game, Set, and Math: Enigmas and Conundrums*. New York: Penguin Books, 1989.

«ВЫСШАЯ» МАТЕМАТИКА (ОТ АРТУРА БЕНДЖАМИНА)

Benjamin, Arthur T., and Jennifer J. Quinn. *Proofs That Really Count: The Art of Combinatorial Proof*. Washington: Mathematical Association of America, 2003.

Benjamin, Arthur T., and Kan Yasuda. “Magic ‘Squares’ Indeed!” *The American Mathematical Monthly* 106, no. 2 (February 1999): 152–56.

От авторов

Авторы хотели бы поблагодарить Стива Росса и Кэти МакХью из Random House за помощь при написании этой книги. Огромное спасибо Наталье Сент-Клер за выбор первоначального проекта (частично поддержанного грантом Фонда Меллона).

Артур Бенджамин особо хочет отметить тех, кто вдохновил его стать математиком и волшебником: психолога Уильяма Чейза, иллюзионистов и магов Павла Гертнера и Джеймса Рэнди и математиков Алана Голдмана и Эдварда Шейнермана. Наконец, спасибо всем коллегам и студентам колледжа Harvey Mudd, а также моей жене Дине и дочерям Лорел и Ариэль за то, что постоянно вдохновляют меня.

Об авторах

Артур Бенджамин — профессор математики в колледже Harvey Mudd города Клермонт. Получил докторскую степень математических наук в университете Джонса Хопкинса в 1989 году. В 2000 году Математическая ассоциация Америки присудила ему премию Наимо за выдающиеся успехи в преподавании. Он также профессиональный математик и часто выступает в «Волшебном замке» в Голливуде. Доктор Бенджамин демонстрировал и объяснял свои вычислительные таланты зрителям по всему миру. В 2005 году Reader's Digest назвал его America's Best Math Whiz (вольный перевод: «лучший американский математик-ученый»).

Майкл Шермер — редактор и ведущий рубрики журнала Scientific American, издатель журнала Skeptic (www.skeptic.com), исполнительный директор Сообщества скептиков и руководитель курса публичных научных лекций Калтеха. Он автор многочисленных научных книг, в том числе Why People Believe Weird Things («Почему люди верят фантастическим вещам»), How We Believe («Как мы верим»), The Science of Good and Evil («Наука добра и зла»), The Borderlands of Science («Пограничные области науки») и Science Friction («Научные противоречия»).

Максимально полезные книги от издательства «Манн, Иванов и Фербер»

Заходите в гости: <http://www.mann-ivanov-ferber.ru/>

Наш блог: <http://blog.mann-ivanov-ferber.ru/>

Мы в Facebook: <http://www.facebook.com/mifbooks>

Мы ВКонтакте: <http://vk.com/mifbooks>

Предложите нам книгу:

<http://www.mann-ivanov-ferber.ru/about/predlojite-nam-knigu/>

Ищем правильных коллег:

<http://www.mann-ivanov-ferber.ru/about/job/>

Научно-популярное издание

Артур **Бенджамин**, Майкл **Шермер**

Магия чисел

Ментальные вычисления в уме
и другие математические фокусы

Главный редактор *Артем Степанов*

Ответственный редактор *Наталья Шульпина*

Арт-директор *Алексей Богомолов*

Литературный редактор *Татьяна Сквородникова*

Дизайнер *Сергей Хозин*

Верстка *Лариса Чернокозинская*

Корректоры *Юлия Жандарова, Екатерина Лебедева*