Комплексные числа

1 Вводим числа (и их алгебру)

Комплексное число

$$z = 1 \cdot x + i \cdot y \equiv x + iy; x, y \in \mathbb{R}$$

это (двумерный) вектор, натянутый на орты «вещественная единица» (1, $1^2 = 1$) и «мнимая единица» (i, $i^2 = -1$). Далее я не буду явно выписывать умножение на вещественную единицу: оно будет подразумеваться.

Множество комплексных чисел $\mathbb{C}$, содержащее комплексные числа ($z \in \mathbb{C}$) – это множество элементов указанного вида, снабжённое «естественными» операциями сложения и умножения:

$$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

«Естественность» мотивируется тем, что при $y_i = 0$ мы получим вещественные z_1 и z_2, которые складываются и умножаются точно так же, как и вещественные числа.

x_i называют вещественной частью ($\mathfrak{Re}$) z_i, а y_i – мнимой частью ($\mathfrak{Im}$) (компонентой). Обозначения:

$$x_i = \mathfrak{Re}(z_i), y_i = \mathfrak{Im}(z_i).$$

Равенство двух комплексных чисел («$z_1 = z_2$») – это покомпонентное равенство двух векторов (то есть $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$), или, что то же самое, равенство их мнимых и вещественных частей: $\mathfrak{Re}(z_1) = \mathfrak{Re}(z_2), \mathfrak{Im}(z_1) = \mathfrak{Im}(z_2)$.

Мы также можем ввести операцию взятия обратного элемента по сложению, для начала определив комплексный нуль в «естественной форме»:

$$\mathbb{C} \ni 0 = 0 + i \cdot 0.$$

Тогда для любого $z \in \mathbb{C}$ определено число $(-z) \in \mathbb{C}$:

$$-z = (-x) + i(-y)$$

и для введённого выше правила сложения очевидно (легко проверить), что $z + (-z) = 0$.

Чтобы продвинуться в определении обратного по умножению числа $(1/z)$ нам сначала нужно ввести понятие сопряжённого элемента z^*:

$$\forall z = x + iy, z^* = x - iy,$$

то есть вещественная часть сопряжённого с z числа равна вещественной части z, а мнимая – равна по модулю, но противоположена по знаку.

α: *Отвлечение.* Вообще говоря, * можно рассматривать как оператор («функцию»), действующий на $z \in C$. Этот оператор называется инволюцией, поскольку его квадрат (дважды применённый оператор, то есть) оставляет любое число на месте; ещё говорят, что «квадрат оператора инволюции равен тождественному оператору». Это, собственно, определение любого инволютивного оператора, не только комплексного сопряжения. *Конец отвлечения.* :ω

Величина $z \cdot z^*$ (произведение z и z^*) чисто вещественна,

$$zz^* = x^2 + y^2$$

и называется квадратом модуля комплексного числа z: $|z|^2$. Сам же модуль – арифметическое (неотрицательное значение) квадратного корня:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Легко проверить, что утверждения $z = 0$ и $|z| = 0$ являются тождественными («тогда и только тогда»).

Для $z \neq 0$ определено обратное (по умножению) число:

$$1/z = \frac{z^*}{|z|^2},$$

поскольку произведение этого числа и самого z равно единице[1],

$$z \cdot (1/z) = \frac{zz^*}{|z|^2} = 1.$$

[1]Комплексная единица – это $1 + i \cdot 0$: все обычные свойства единицы проверяются напрямую.

что и оправдывает обозначение $1/z$ (или z^{-1}). В явном виде

$$z^{-1} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}, z \neq 0.$$

Можете проверить единственность z^{-1} прямым вычислением («проверить единственность»: предположить, что есть другое число, $(1/z)'$, которое при умножении на z даёт единицу, и получить, что тогда это число тождественно равно $1/z$).

Таким образом, мы получили выражения для сложения/умножения комплексных чисел и поиска обратных элементов. Это, заодно, определяет правило нахождения любой целой степени z^n.

2 Тригонометрическая форма

Граждане Муавр и Эйлер доказали, что есть такое (странное) соотношение:

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi); \phi \in \mathbb{R}.$$

// Говорят, что Муавр доказал тождество «если $z = r[\cos(\phi) + i\sin(\phi)]$, то $z^n = r^n[\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)]$», что, впрочем, не слишком отличается от написанного выше (если чуть-чуть заняться алгеброй). //

Если вы знакомы с рядами Тейлора (ну хорошо, даже если с рядами Маклорена знакомы /кои есть ряды Тейлора для разложения вокруг нуля/ – тоже сгодится) для экспоненты, синуса и косинуса,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

то формально («алгебраически»: просто подставив и сложа/вычтя) вы эти соотношения докажете в два счёта (попробуйте: это легко), а вот сходимость этих рядов – факт как раз менее тривиальный.

α: *Отвлечение.* А уж то, что верно тождество

$$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z), z \in \mathbb{C}$$

(вся «соль» которого заключается в том, что z – произвольное комплексное число) – это ещё менее тривиальная штука. *Конец отвлечения.* :ω

Если мы вдруг знаем основное тригонометрическое тождество (или теорему Пифагора, скажем), то легко получим значение модуля числа $e^{i\phi}$:

$$|e^{i\phi}|^2 = \cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) = 1.$$

Из этого можно заключить, что числа вида $\cos(\phi)+i\sin(\phi)$ не исчерпывают всего $\mathbb{C}$. А вот если такие числа да (как Муавр примерно) помножить на $r \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, то начинает казаться, что эта комбинация,

$$z(r, \phi) = r\cos(\phi) + ir\sin(\phi) \equiv re^{i\phi},$$

имеет шанс исчерпать все комплексные числа.

α: *Отвлечение.* Тут нужно сразу заметить, что по началу кажется не очень нужным рассматривать ϕ, лежащие вне полуотрезка $[0, 2\pi)$, поскольку $z(r, \phi + 2\pi n) = z(r, \phi), \forall n \in \mathbb{Z}$. И это не полностью неправильная идея, однако, как будет объяснено дальше, иногда стоит и задуматься, что же такого различного могло бы быть при $n \neq 0$. *Конец отвлечения.* :ω

Пока, однако, мы как раз займёмся случаем, когда $\phi \in [0, 2\pi)$.

Утверждение: для $z \neq 0$ мы можем не просто записать комплексное число в двух видах, $z = x + iy$ и $z = r\exp(i\phi)$, но и вполне однозначно сопоставить каждой паре (x, y) пару (r, ϕ) и наоборот («взаимнооднозначно», то есть, сопоставить). Одно из соотношений напишу, $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, остальные три – $\phi(x, y)$, $x(r, \phi)$ и $y(r, \phi)$ – напишите, пожалуйста, сами и поймите, откуда возникает взаимная однозначность (при $r \in \mathbb{R}^+$, $\phi \in [0, 2\pi)$, конечно).

r, опять же, называют модулем z, а вот ϕ – фазой z.

$z = 0$ выделено: для него $r = 0$ и «подходят» любые ϕ, так что по известным x и y значения ϕ восстановить не удастся (возникнет деление нуля на ноль: это, кстати, один из признаков того, что у нас для $z = 0$

нет однозначности отображения). И такая выделенность иногда проходит незаметно, а иногда действительно мешает (то есть, приходится этот случай отдельно рассматривать): будьте внимательны поэтому.

Вообще, я вам напишу соотношения для x и y: $x(r, \phi) = r\cos(\phi)$, $y(r, \phi) = r\sin(\phi)$, поэтому (если мыслить геометрически и рассматривать пару (x, y) как двумерный вектор на плоскости в декартовой /прямоугольной/ системе координат) r становится длиной вектора, а ϕ – углом между его направлением и (вещественной) осью Ox, отсчитанным против часовой стрелки.

И вот это «мыслить геометрически» и называется тригонометрической формой комплексного числа. Или «записью в полярных координатах», хотя это чуть менее расхожее название.

Чем же полезна такая запись, $z = r\exp(i\phi)$? Ну, например тем, что $z^n = r^n\exp(in\phi)$ и это получается вполне тождественно с обычным свойством степеней,

$$a^n \cdot a^m = a^{m+n}, (a^n)^m = a^{nm}$$

и его разными обобщениями («продолжениями почти по-определению?») на нецелые m и n.

Эта форма, то есть, сильно удобна для умножения двух комплексных чисел: $z_1 = r_1e^{i\phi_1}$, $z_2 = r_2e^{i\phi_2}$,

$$z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\phi_1+\phi_2)}.$$

А ещё, ещё эта форма *крайне* малоудобна для сложения чисел: попробуйте отыскать $r(z_1 + z_2)$ и $\phi(z_1 + z_2)$. Оно не то, чтобы совсем конец света, но довольно громоздко.

Ну и вот, стало быть, для умножения – всё прямо хорошо, для нахождения обратного элемента – тоже:

$$z^{-1} = (1/r)e^{-i\phi}$$

или, эквивалентно

$$r(1/z) = 1/r(z), \phi(1/z) = -\phi(z) + 2\pi.$$

3 Извлечение корней

Напомню, что корень n-й степени из чего-то – это такое значение, которое если в степень n возвести, то получится наше «чего-то»:

$$[\sqrt[n]{(t)}]^n = t.$$

Тригонометрическая форма тут (как величайшее изобретение для умножения) сильно наводит на следующую мысль:

$$z = re^{i\phi} \Rightarrow \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\phi/n}.$$

И это правда, вот только не вся. Дело в том, что кроме такого выражения для корня подходят ещё и все следующие:

$$\sqrt[n]{r} \exp\left(i\phi/n + 2\pi i m/n\right), m \in \mathbb{Z}.$$

Различных среди них – то есть таких, у которых фаза $(\phi/n + 2\pi i m/n)$ лежит внутри полу-интервала $[0, 2\pi)$ – n штук, скажем (особенно если мы такой полу-интервал и хотим), с $m = 0, 1, \ldots, n-1$.

В выражении $\sqrt[n]{r}$, кстати, имеют в виду тот самый – арифметический корень n-й степени (неотрицательной) величины r.

Но что делать? Мы получили n разных кандидатов на роль «корень n-й степени из z». Поскольку у нас тут не выборы, а эти n корней – различные комплексные числа, то всё, что мы можем – это сказать «а у нас будет ровно n -штук разных корней n-й степени из комплексного числа $z \neq 0$». При $z = 0$, потому что, все корни равны одному числу – нулю.

В таком подходе нет чего-то уж прямо удивительного: $\sqrt{4}$, в конце концов, вполне бывает равен и 2, и (-2).

4 Ещё раз про сложение/умножение: их геометрия

Сложение двух комплексных чисел – это сложение векторов (их декартовых компонент). Геометрически – «правило треугольника» или «правило параллелограмма».

Умножение, напоминаю, в тригонометрической форме выглядит так:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)}.$$

То есть, когда мы смотрим, что происходит с z_1 при умножении на z_2, геометрическая картина такова:

A. модуль z_1 меняется в r_2 раз. Геометрически это равносильно растяжению ($r_2 > 1$), сжатию ($r_2 < 1$) или ничему особенному ($r_2 = 1$);

B. фаза z_1 меняется на ϕ_2: это поворот вектора z_1 против часовой стрелки на ϕ_2 градусов.

Если мы будем преобразовывать не один вектор z_1, а всю комплексную плоскость (так тоже полезно смотреть на разные преобразования), то

I. сложение – это трансляция (параллельный перенос) комплексной плоскости на вектор (x_2, y_2);

II. умножение – композиция растяжения/сжатия длин векторов и вращения всей плоскости на угол ϕ_2 против часовой стрелки.

Такая вот геометрия, такое землемерие.